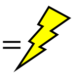
M 9.1

Quadratwurzeln

$\sqrt{a}$ ist diejenige nicht negative Zahl, die quadriert a ergibt: $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$

Die Zahl a unter der Wurzel heißt **Radikand**: $\sqrt{a}$

Quadratwurzeln sind nur für positive Zahlen definiert: $a \geq 0$

$\sqrt{25} = 5$; $\sqrt{81} = 9$; $\sqrt{0{,}25} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} = 0{,}5$; $\sqrt{0{,}0081} = 0{,}09$; $\sqrt{-4} =$ 

©Carina Kahoun (2021)

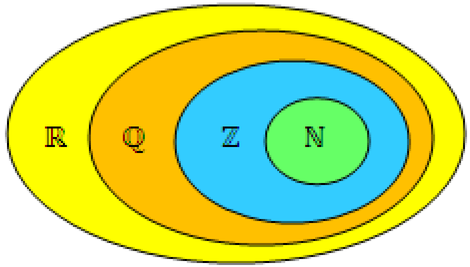
M 9.2

Reelle Zahlen

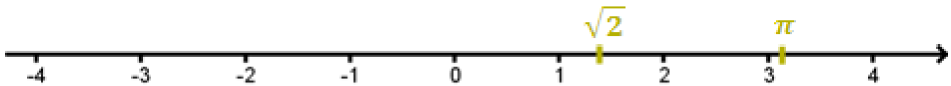
Jeder unendliche nicht periodische Dezimalbruch stellt eine **irrationale Zahl** dar.

$\sqrt{2}$; $-\sqrt{7}$; π; $0{,}12345\ldots$

Die rationalen und die irrationalen Zahlen bilden zusammen die **Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen**.



Jede reelle Zahl besitzt einen Bildpunkt auf der Zahlengeraden und jedem Punkt auf der Zahlengeraden entspricht genau eine reelle Zahl.



©Carina Kahoun (2021)

M 9.3

Rechenregeln für Wurzeln

Multiplikationsregel: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$

Divisionsregel: $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

Betrag: $\sqrt{a^2} = |a|$

Vorsicht: Man darf Wurzeln nicht auf die einzelnen Glieder einer Summe verteilen!

$$\cancel{\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

$\cdot$	✓
$:$	✓
$+$	⚡

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 18} = \sqrt{36} = 6; \qquad \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{18}} = \sqrt{\frac{8}{18}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3};$$

$$\sqrt{16a^2b^2} = 4|ab|\,; \qquad \sqrt{4 + x^2 - 4x} = \sqrt{(2-x)^2} = |2 - x|$$

Anwendungen:

1) Teilweises Radizieren: $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$
2) Nenner rational machen: $\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$
3) Summen und Differenzen von Wurzeln: $5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

©Carina Kahoun (2021)

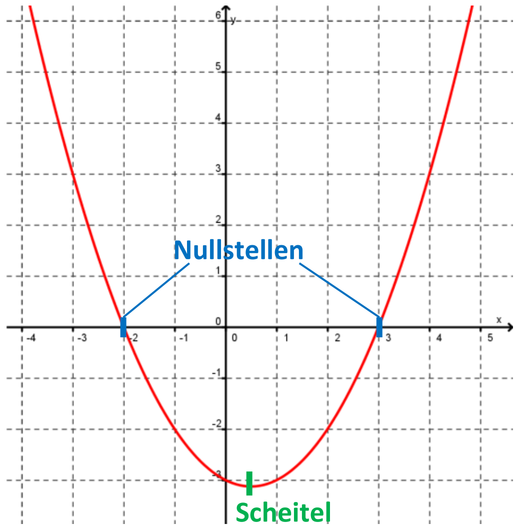
M 9.4

Quadratische Funktionen: Die Parabel

Der Graph einer quadratischen Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ heißt **Parabel**.

Die Parabel ist für

- $a > 0$ nach oben geöffnet.
- $a < 0$ nach unten geöffnet.



Ist $a = 1$ oder $a = -1$ heißt der Graph **Normalparabel**.

Der tiefste bzw. höchste Punkt heißt **Scheitel** der Parabel.

©Carina Kahoun (2021)

M 9.5

Quadratische Funktionen: Scheitelform

Jede quadratische Funktion lässt sich durch **quadratische Ergänzung** in die

Scheitelpunktform $f(x) = a(x+d)^2 + e$ bringen.

$\Rightarrow$ Scheitel $(-d|e)$

für $|a| > 1$ enger als die Normalparabel

für $|a| < 1$ weiter als die Normalparabel

Um d in x-Richtung verschoben

Um e in y-Richtung verschoben

$$\boldsymbol{f(x) = 0,5x^2 + 2x + 5}$$

$f(x) = 0{,}5(x^2 + 4x + 10) =$

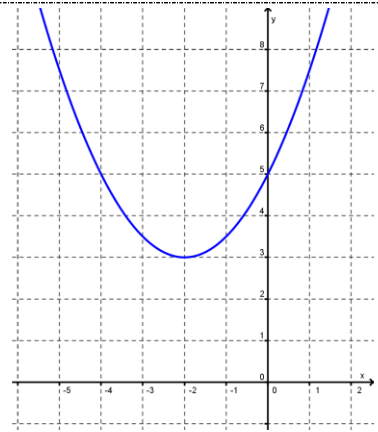
$= 0{,}5\left(x^2 + 4x + 2^2 - 2^2 + 10\right) =$ **Quadratische Ergänzung**

$= 0{,}5[(x+2)^2 - 2^2 + 10] =$

$= 0{,}5[(x+2)^2 + 6] =$

$= 0{,}5(x+2)^2 + 3$

$\Rightarrow S(-2|3)$



©Carina Kahoun (2021)

M 9.6

Quadratische Gleichungen

Gleichungen der Form $ax^2 + bx + c = 0$ heißen **quadratische Gleichungen.**

- Ihre Lösungen sind die Nullstellen der zugehörigen quadratischen Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$.
- Sind x_1 und x_2 die Lösungen, so kann man die Funktion schreiben als $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ (Linearfaktorzerlegung)

Lösungsformel („Mitternachtsformel"):

$$\boldsymbol{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Der Term unter der Wurzel $b^2 - 4ac$ heißt **Diskriminante D**. Er gibt an, wie viele Lösungen die Gleichung besitzt.

$D > 0$	zwei Lösungen
$D = 0$	eine Lösung
$D < 0$	keine Lösung

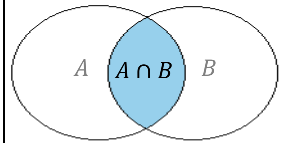
$$3x^2 - 5x - 2 = 0 \;\Rightarrow\; x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} = \frac{5 \pm 7}{6} \;\Rightarrow\; x_1 = \frac{12}{6} = 2, x_2 = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

©Carina Kahoun (2021)

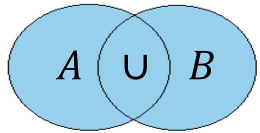
M 9.7

Mengendiagramm und Vierfeldertafel

Schnittmenge $\boldsymbol{A \cap B}$ bedeutet, dass das Ereignis **$\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$** eintritt.



Vereinigungsmenge $\boldsymbol{A \cup B}$ bedeutet, dass das Ereignis **$\boldsymbol{A}$ oder $\boldsymbol{B}$** eintritt.



Es gilt: $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

Betrachtet man zwei Ereignisse A und B, so können die zugehörigen absoluten Häufigkeiten übersichtlich in einer **Vierfeldertafel** dargestellt werden. Alternativ kann die Vierfeldertafel auch relative Häufigkeiten/Wahrscheinlichkeiten enthalten.

	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{\bar{A}}$	
$\boldsymbol{B}$	15	5	**20**
$\boldsymbol{\bar{B}}$	55	25	**80**
	70	**30**	**100**

	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{\bar{A}}$	
$\boldsymbol{B}$	0,2	0,3	**0,5**
$\boldsymbol{\bar{B}}$	0,2	0,3	**0,5**
	0,4	**0,6**	**1**

©Carina Kahoun (2021)

M 9.8

Ähnliche Figuren

Zwei Figuren F und G heißen **ähnlich** ($F \sim G$), wenn man F so vergrößern oder verkleinern kann, dass die Bildfigur F' zu G kongruent ist.

Für ähnliche Figuren gilt:

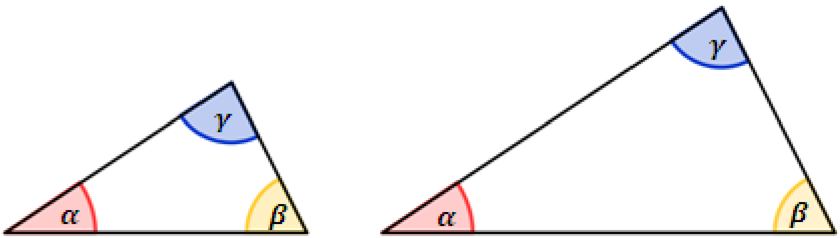
- entsprechende Winkel sind gleich groß
- die Verhältnisse entsprechender Streckenlängen sind gleich

Dreiecke sind ähnlich, wenn bereits eine der beiden Eigenschaften erfüllt ist.

$\boldsymbol{\alpha = 33{,}7°}$

$\boldsymbol{\beta = 82{,}9°}$

$\boldsymbol{\gamma = 63{,}4°}$



©Carina Kahoun (2021)

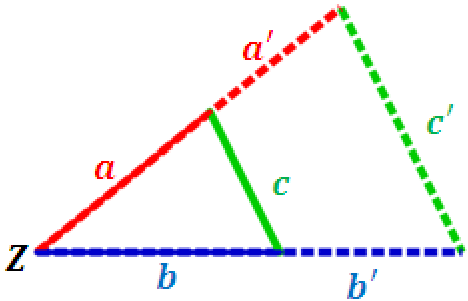
M 9.9

Strahlensätze

V-Figur	X-Figur
$c \parallel c'$	$c \parallel c'$

V-Figur

$c \parallel c'$



1. Strahlensatz

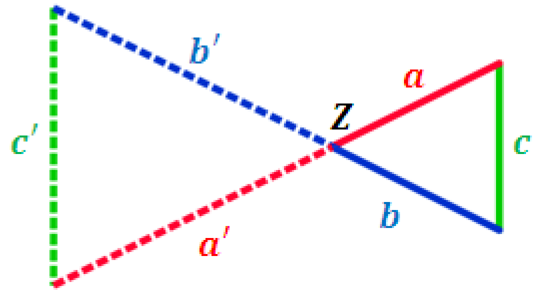
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \quad oder \quad \frac{a}{a'-a} = \frac{b}{b'-b}$$

2. Strahlensatz

$$\frac{c}{c'} = \frac{a}{a'} \qquad \frac{c}{c'} = \frac{b}{b'}$$

X-Figur

$c \parallel c'$



1. Strahlensatz

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \quad oder \quad \frac{a}{a'+a} = \frac{b}{b'+b}$$

2. Strahlensatz

$$\frac{c}{c'} = \frac{a}{a'} \qquad \frac{c}{c'} = \frac{b}{b'}$$

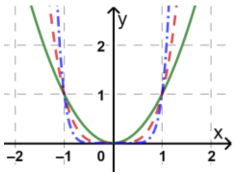
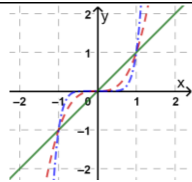
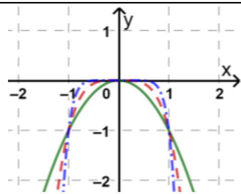
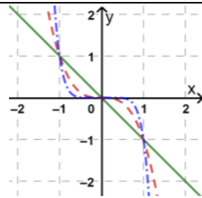
©Carina Kahoun (2021)

M 9.10

Potenzfunktionen

$\boldsymbol{f(x) = ax^n}$ $(n \in \mathbb{N})$ heißt **Potenzfunktion**. Die Zahl n gibt den Grad der Potenzfunktion an.

Das Verhalten von Potenzfunktionen:

	Exponent gerade	**Exponent ungerade**
	Achsensymmetrie	Punktsymmetrie
$\boldsymbol{a > 0}$	 „von links oben nach rechts oben“	 „von links unten nach rechts oben“
$\boldsymbol{a < 0}$	 „von links unten nach rechts unten“	 „von links oben nach rechts unten“

©Carina Kahoun (2021)

M 9.11

n-te Wurzel

$\sqrt[n]{a}$ ist diejenige nicht negative Zahl, deren n-te Potenz a ergibt: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

Die Zahl n heißt **Wurzelexponent**: $\sqrt[n]{a}$

n-te Wurzeln sind nur für positive Zahlen definiert: $a \geq 0$

$\sqrt[3]{8} = 2;$ $\sqrt[4]{81} = 3;$ $\sqrt[5]{3125} = 5;$ $\sqrt[4]{0{,}0081} = 0{,}3;$ $\sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{4}$

Die Gleichung $x^n = a$ kann zwei, eine oder keine Lösung haben:

	n gerade	**n ungerade**
$a > 0$	$L = \{-\sqrt[n]{a};\ \sqrt[n]{a}\}$	$L = \{\sqrt[n]{a}\}$
$a = 0$	$L = \{0\}$	$L = \{0\}$
$a < 0$	$L = \{\,\}$	$L = \{-\sqrt[n]{a}\}$

$x^4 = 2 \Rightarrow L = \{-\sqrt[4]{2};\ \sqrt[4]{2}\}$

$x^3 = -2 \Rightarrow L = \{-\sqrt[3]{2}\}$

©Carina Kahoun (2021)

M 9.12

Potenzen mit rationalen Exponenten

Für $a > 0$ gilt: $\quad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \qquad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2; \qquad 8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = 2^2 = 4; \qquad 9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}; \qquad 9^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{9^3}} = \frac{1}{27}$

Rechenregeln

Multiplizieren bei gleicher Basis:

Exponenten addieren

$$4^{\frac{1}{6}} \cdot 4^{\frac{1}{3}} = 4^{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}} = 4^{\frac{1}{2}} = 2$$

Multiplizieren bei gleichem Exponenten

$$5^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{\frac{1}{3}} = (5 \cdot 8)^{\frac{1}{3}} = 40^{\frac{1}{3}} = 2\sqrt[3]{5}$$

Potenzieren von Potenzen

Exponenten multiplizieren

$$\left(8^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}} = 8^{\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = 8^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

Dividieren bei gleicher Basis

Exponenten subtrahieren

$$4^{-\frac{1}{3}} : 4^{\frac{1}{6}} = 4^{-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}} = 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Dividieren bei gleichem Exponenten

$$2^{\frac{1}{3}} : 54^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{2}{54}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

Summen und Differenzen

Zusammenfassen ***nur bei gleichartigen Termen*** möglich!

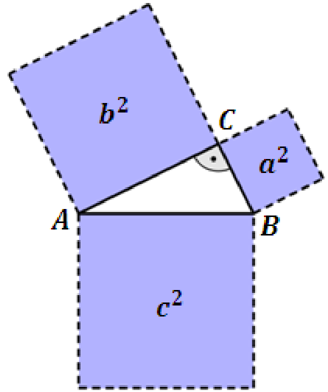
$$7a^{\frac{1}{3}} - 3a^{\frac{1}{3}} = 4a^{\frac{1}{3}}$$

©Carina Kahoun (2021)

M 9.13

Satz des Pythagoras

In jedem rechtwinkligen Dreieck haben die Quadrate über den Katheten zusammen den gleichen Flächeninhalt wie das Quadrat über der Hypotenuse.



$$\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}$$

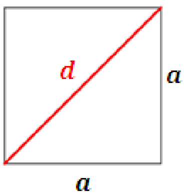
Kehrsatz: Gilt $a^2 + b^2 = c^2$, so hat das Dreieck bei C einen rechten Winkel.

Anwendungen:

Diagonale im Quadrat

$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

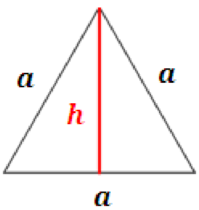
$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{d = a\sqrt{2}}$



Höhe im gleichseitigen Dreieck

$h^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = a^2$

$\Leftrightarrow h^2 = \frac{3}{4}a^2 \quad \Leftrightarrow \boldsymbol{h = \frac{a}{2}\sqrt{3}}$



©Carina Kahoun (2021)

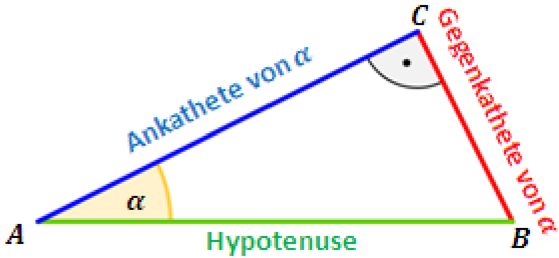
M 9.14

Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck

$$\sin\alpha = \frac{Gegenkathete\ von\ \alpha}{Hypotenuse}$$

$$\cos\alpha = \frac{Ankathete\ von\ \alpha}{Hypotenuse}$$

$$\tan\alpha = \frac{Gegenkathete\ von\ \alpha}{Ankathete\ von\ \alpha}$$



Beziehungen: $\sin\alpha = \cos\ (90° - \alpha)$; $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$; $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

Werte:

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$ *Merkhilfe*	0 $\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$ $\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$ $\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1 $\frac{1}{2}\sqrt{4}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	existiert nicht

©Carina Kahoun (2021)

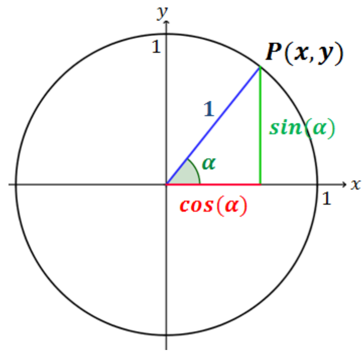
M 9.15

Sinus und Kosinus am Einheitskreis

Für beliebige Winkel $0 < \alpha < 360^\circ$ gibt

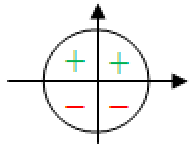
- der Sinus die y-Koordinate: $y = \sin(\alpha)$
- der Kosinus die x-Koordinate: $x = \cos(\alpha)$

eines Punktes P an, der unter α auf dem Einheitskreis liegt.

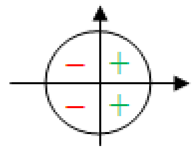


Die Sinuswerte (bzw. Kosinuswerte) haben für den spitzen Winkel α sowie für die Winkel $180° - \alpha, 180° + \alpha$ und $360° - \alpha$ denselben Betrag. Die Vorzeichen liefern die Quadranten:

Sinus



Kosinus



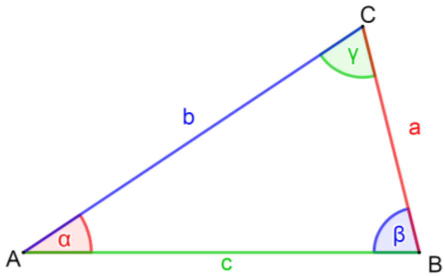
$\sin 25° = \sin 155° \approx 0{,}42$; $\sin 230° = \sin 310° = -\sin 50° \approx -0{,}77$

$\cos 25° = \cos 335° \approx 0{,}91$; $\cos 230° = \cos 130° = -\cos 50° \approx -0{,}64$

©Carina Kahoun (2021)

M 9.16

Sinussatz und Kosinussatz



Sinussatz	Kosinussatz
In jedem Dreieck verhalten sich die Längen zweier Seiten wie die Sinuswerte ihrer Gegenwinkel. $$\frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\ ;\ \frac{b}{c}=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\ ;\ \frac{a}{c}=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$$	In jedem Dreieck gilt: $$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha$$ $$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos\beta$$ $$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma$$

©Carina Kahoun (2021)