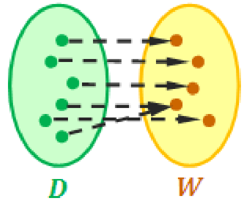
M 8.1

Funktionsbegriff

Eine Zuordnung $x \mapsto y$, die jedem x-Wert genau einen y-Wert zuordnet, heißt **Funktion** (→ eindeutige Zuordnung).

- Der von x abhängige Wert $f(x)$ bzw. y heißt **Funktionswert**.
- Die Menge aller zulässigen x-Werte heißt **Definitionsmenge D**.
- Die Menge aller möglichen Funktionswerte heißt **Wertemenge W**.



Beispiel für eine Funktion:

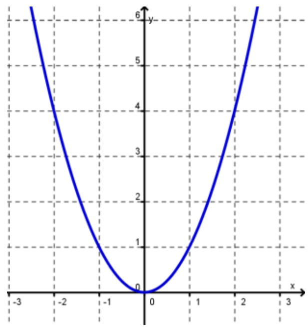
Schreibweisen:

- $f: x \mapsto x^2$
- $f(x) = x^2$
- $y = x^2$

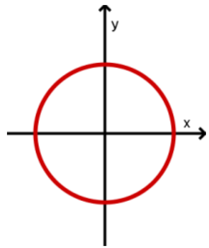
$D_f = \mathbb{Q}$

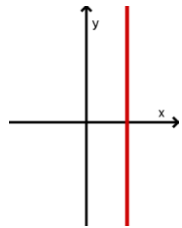
$W_f = \mathbb{Q}_0^+$

Graph:



Keine Funktionen:





M 8.2

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

- Die x-Koordinate des **Schnittpunktes mit der $\boldsymbol{x}$-Achse** heißt **Nullstelle**.
  Ansatz zur Berechnung: $\boldsymbol{f(x) = 0}$

- Den **Schnittpunkt mit der $\boldsymbol{y}$-Achse** $S(0|y_S)$ berechnet man durch
  $\boldsymbol{y_S = f(0)}$

Funktion: $\boldsymbol{f(x) = 2x - 4}$

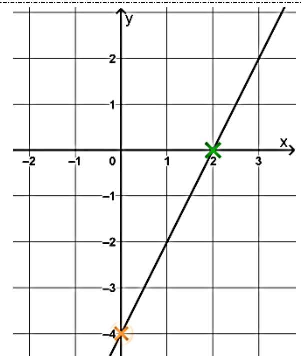
Nullstelle:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ 2x - 4 &= 0 \quad | +4 \\ 2x &= 4 \quad |:2 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Schnittpunkt mit der $\boldsymbol{y}$-Achse:

$$f(0) = 2 \cdot 0 - 4 = -4$$

$$\Rightarrow S(0|-4)$$



©Carina Kahoun (2020)

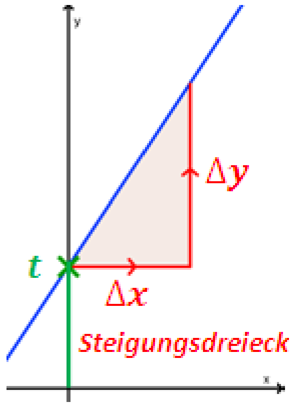
M 8.3

Lineare Funktionen

Funktionsgleichung: $y = mx + t$

Steigung

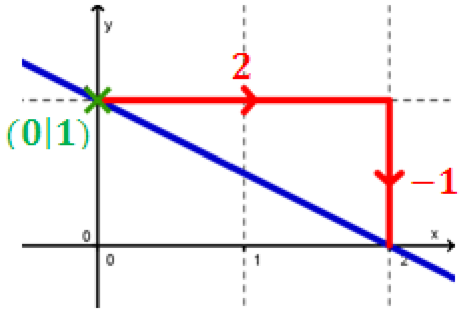
y-Achsenabschnitt



Graph: Gerade mit der Steigung $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ durch den Punkt $(0|t)$

Zeichne den Graphen der Funktion $y = -\frac{1}{2}x + 1.$

- Markiere den Punkt $(0|1)$.
- Trage von dort den Nenner von $m = \frac{-1}{2}$ in x-Richtung ab
- und trage dann den Zähler von $m = \frac{-1}{2}$ in y-Richtung ab.



M 8.4

Aufstellen der Geradengleichung

Ansatz: $y = \color{red}{m}x + \color{green}{t}$

1. **Schritt: Bestimme die Steigung m**
2. **Schritt: Bestimme den y-Achsenabschnitt t**

Bestimme den Funktionsterm der linearen Funktion, deren Graph durch die Punkte $A(2|3)$ und $B(4|-1)$ verläuft.

Ansatz: $y = \color{red}{m}x + \color{green}{t}$

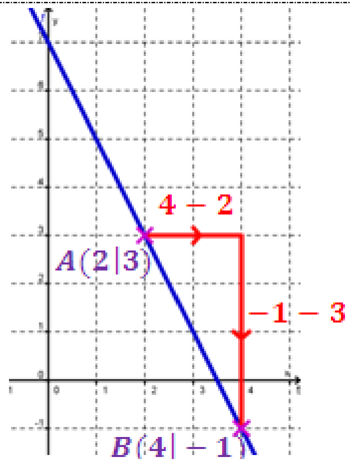
1. Schritt:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1-3}{4-2} = -\frac{4}{2} = -2$$

2. Schritt: Setze A oder B in $y = -2x + t$ ein:

$$3 = -2 \cdot 2 + t \quad \Rightarrow t = 7$$

$$\Rightarrow y = -2x + 7$$



M 8.5

Lineare Ungleichungen

Ungleichungen kann man wie Gleichungen schrittweise vereinfachen.

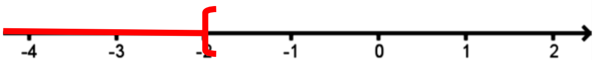
Vorsicht: Bei Multiplikation oder Division mit einer **negativen Zahl**, kehrt sich das Ungleichheitszeichen um!

Die Lösungsmenge kann man in **Mengen- oder Intervallschreibweise** angeben.

$$-3x > 6 \quad |:(-3)$$
$$x < -2$$

$$L = \{x|x < -2\}$$

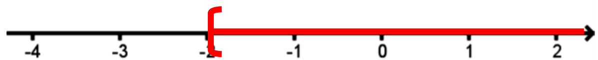
$$L =]-\infty; -2[$$



$$-\frac{1}{4}x \leq 0{,}5 \quad | \cdot (-4)$$
$$x \geq -2$$

$$L = \{x|x \geq -2\}$$

$$L = [-2; \infty[$$

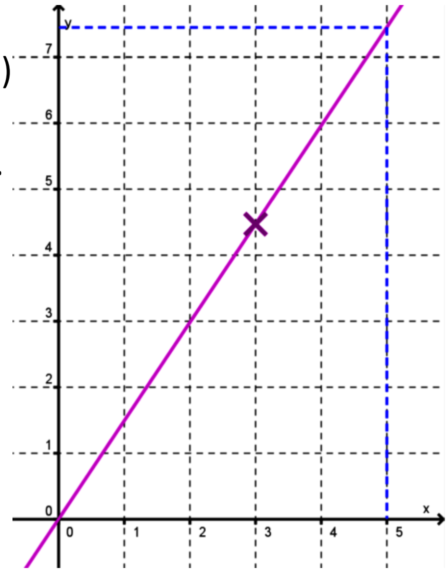


M 8.6

Direkte Proportionalität

Zwei einander zugeordnete Größen x und y sind **direkt proportional**, wenn

- zum n-fachen Wert von x der n-fache Wert von y gehört.
- der Quotient $\frac{y}{x} = m$ für alle Wertepaare gleich ist.
  (= **Proportionaliätsfaktor m,** Steigung der Geraden)
- $y = m \cdot x$ ist *(Spezialfall einer linearen Funktion)*
- der Graph der Zuordnung eine **Ursprungsgerade** ist.



3 Ananas kosten 4,47€. Wie viel kosten 5 Ananas?

Die Zuordnung $\mathbf{Anzahl}(x) \mapsto \boldsymbol{Preis}(y)$ ist proportional.

Dreisatz oder ***Proportionalitätsfaktor***

$$\begin{array}{rrcll} :3 & 3 & \mapsto & 4{,}47€ & :3 \\ & 1 & \mapsto & 1{,}49€ & \\ \cdot 5 & \mathbf{5} & \mapsto & \mathbf{7{,}45€} & \cdot 5 \end{array}$$

$$m = \frac{4{,}47€}{3} = 1{,}49€$$

$$y = m \cdot x = 1{,}49€ \cdot 5 = \mathbf{7{,}45€}$$

M 8.7

Gebrochen rationale Funktionen – Bruchterme

Terme mit einer Variablen im Nenner heißen **Bruchterme**.

$$\frac{1}{x};\quad \frac{3}{x};\quad \frac{5}{x-1};\quad \frac{z-3}{z^2};\quad \frac{3a-1}{a+2}$$

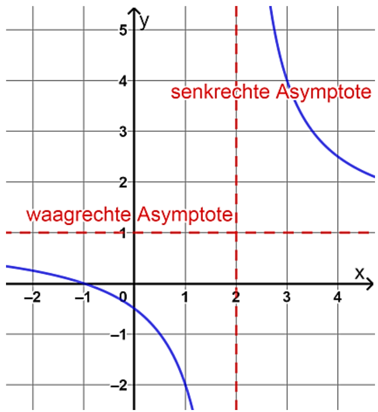
Funktionen, deren Funktionsterme Bruchterme enthalten, heißen **gebrochen-rationale Funktionen**.

Ihr Graph ist eine **Hyperbel**.

Werte, für die der Nenner null wird, dürfen nicht eingesetzt werden und gehören nicht zur Definitionsmenge der Funktion. Diese Zahlen nennt man **Definitionslücken**.

Geraden, an die sich der Graph beliebig nahe annähert, nennt man **Asymptoten**.

$f(x) = \frac{3}{x-2} + 1;\ D_f = \mathbb{Q}\backslash\{2\}$



M 8.8

Verschieben, Strecken, Spiegeln von Funktionsgraphen

Streckung / Stauchung

$|a| > 1$ Streckung

$|a| < 1$ Stauchung

$a < 0$ Spiegelung an der x-Achse

$$f(x) = \frac{a}{x + b} + c$$

Verschiebung in y-Richtung

$c > 0$ nach oben

$c < 0$ nach unten

Verschiebung in x-Richtung

$b > 0$ nach links

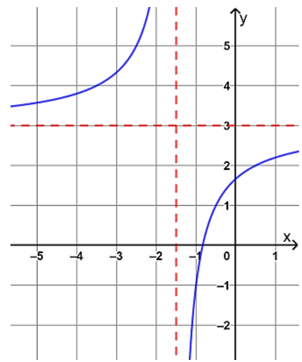
$b < 0$ nach rechts

$$f(x) = \frac{-2}{x+1{,}5} + 3$$

Der Graph von f ist im Vergleich zur Normalhyperbel (mit Funktionsterm $\frac{1}{x}$)

- gespiegelt an der x-Achse
- in y-Richtung gestreckt mit Faktor 2
- um 1,5 nach links verschoben
- um 3 nach oben verschoben

senkrechte Asymptote: $x = -1{,}5$; waagrechte Asymptote: $y = 3$

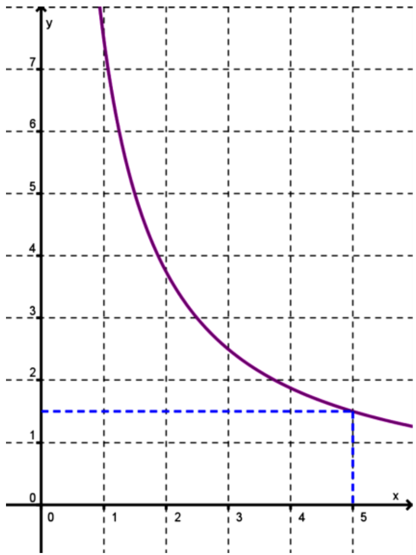


M 8.9

Indirekte Proportionalität

Zwei einander zugeordnete Größen x und y sind **indirekt** (oder „umgekehrt“) **proportional**, wenn

- zum n-fachen Wert von x der $\frac{1}{n}$-fache Wert von y gehört.
- das Produkt $x \cdot y = a$ für alle Wertepaare gleich ist.
- $y = \frac{a}{x}$ ist. *(Spezialfall einer gebrochen-rationalen Funktion)*
- der Graph der Zuordnung eine Hyperbel ist.



Mit 3 Schläuchen ist ein Schwimmbecken in 2,5 Stunden gefüllt. Wie lange dauert es mit 5 Schläuchen?

Die Zuordnung $\mathbf{Anzahl}(x) \mapsto \mathbf{Stunden}(y)$ ist indirekt proportional.

Dreisatz

$$\begin{array}{rccl} & 3 \mapsto 2{,}5h & \\ :3 \downarrow & & \uparrow \cdot 3 \\ & 1 \mapsto 7{,}5h & \\ \cdot 5 \downarrow & & \uparrow :5 \\ & 5 \mapsto \mathbf{1{,}5h} & \end{array}$$

oder

$$a = 3 \cdot 2{,}5h = 7{,}5h$$

$$y = \frac{a}{x} = \frac{7{,}5h}{5} = \mathbf{1{,}5h}$$

M 8.10

Rechnen mit Bruchtermen

Kürzen

- *Zähler und Nenner faktorisieren*
- *Gleiche Terme kürzen*

Nie aus Summen kürzen!

$$\frac{3x-5x^2}{7x^3-x}=\frac{\boldsymbol{x}(3-5x)}{\boldsymbol{x}(7x^2-1)}=\frac{3-5x}{7x^2-1}$$

Addieren und Subtrahieren

- *Bruchterme gleichnamig machen*
- *Zähler addieren/subtrahieren*

$$\frac{3}{\boldsymbol{x-1}}+\frac{4}{\boldsymbol{3x-2}}=$$

$$=\frac{3(\boldsymbol{3x-2})}{(x-1)(\boldsymbol{3x-2})}+\frac{4(\boldsymbol{x-1})}{(\boldsymbol{x-1})(3x-2)}=$$

$$=\frac{9x-6+4x-4}{(x-1)(3x-2)}=\frac{13x-10}{(x-1)(3x-2)}$$

Multiplizieren

Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner

$$\frac{3-x}{2x}\cdot\frac{4x}{x-1}=\frac{(3-x)\cdot 4x}{2x(x-1)}$$

Dividieren

Multiplizieren mit dem Kehrbruch

$$\frac{2}{3x}:\frac{4-x}{x^2}=\frac{2}{3x}\cdot\frac{x^2}{4-x}=\frac{2x^2}{3x(4-x)}$$

M 8.11

Potenzgesetze

Für $a, b \neq 0$ und ganzzahlige Exponenten p, q gilt:

1. **gleiche Basis:** $\boldsymbol{a^p \cdot a^q = a^{p+q}}$ **bzw.** $\boldsymbol{\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}}$
2. **gleiche Exponenten:** $\boldsymbol{a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p}$ **bzw.** $\boldsymbol{\frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p}$
3. **Potenzen von Potenzen:** $\boldsymbol{(a^p)^q = a^{p \cdot q}}$

Sonderfälle: $\boldsymbol{a^0 = 1}$; $\boldsymbol{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$; $\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n}$

$3^2 \cdot 3^5 = 3^7$	$3^2 : 3^5 = 3^{-3} = \frac{1}{3^3}$	$x^3 \cdot x^{-6} = x^{-3}$	$\frac{x^7}{x^2} = x^5$
$5^3 \cdot 7^3 = (5 \cdot 7)^3 = 35^3$	$12^5 : 4^5 = (12 : 4)^5 = 3^5$	$x^{-2} \cdot y^{-2} = (xy)^{-2} = \frac{1}{(xy)^2}$	$\frac{x^6}{y^6} = \left(\frac{x}{y}\right)^6$
$(4^3)^5 = 4^{15}$		$(x^{-3})^7 = x^{-21} = \frac{1}{x^{21}}$	

M 8.12

Bruchgleichungen

1. Schritt: Definitionsmenge bestimmen

2. Schritt: Beide Seiten mit dem **gemeinsamen Nenner** aller Bruchterme multiplizieren und anschließend kürzen

3. Schritt: Bruchtermfreie Gleichung lösen

4. Schritt: Überprüfen, ob die Lösung zur Definitionsmenge gehört

5. Schritt: Lösungsmenge angeben

$$\frac{2}{6-x}=\frac{1}{x}$$

$$D=\mathbb{Q}\backslash\{0;6\}$$

$$\frac{2}{6-x}=\frac{1}{x}\ /\cdot x(6-x)$$

$$\frac{2x(6-x)}{6-x}=\frac{x(6-x)}{x}$$

$$2x=6-x\ /+x$$

$$3x=6\ /:3$$

$$x=2$$

$$2\in D$$

$$\Rightarrow L=\{2\}$$

M 8.13

Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Ein **Zufallsexperiment** ist ein Experiment,

1. bei dem genau eines von verschiedenen möglichen Ergebnissen eintritt und
2. bei dem sich nicht vorhersagen lässt, welches Ergebnis eintritt.

Die Menge aller möglichen Ergebnisse nennt man **Ergebnismenge Ω**.

Eine Teilmenge der Ergebnismenge Ω nennt man **Ereignis**.

empirisches Gesetz der großen Zahlen: Wiederholt man ein Zufallsexperiment sehr oft, so pendelt sich die relative Häufigkeit für jedes Ergebnis um einen bestimmten Wert ein (→ Wahrscheinlichkeit).

Zufallsexperiment: einmaliger Würfelwurf

Ergebnismenge: $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Ereignis A: „gerade Zahl“ $\Rightarrow$ $A = \{2; 4; 6\}$

Zufallsexperiment: zweimaliger Münzwurf

Ergebnismenge: $\Omega = \{KK; KZ; ZK; ZZ\}$

Ereignis B: „zuerst Kopf“ $\Rightarrow$ $B = \{KK; KZ\}$

M 8.14

Laplace-Experimente

Zufallsexperimente, bei denen alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind, heißen **Laplace-Experimente**. Die Wahrscheinlichkeit $P(\mathrm{A})$ eines Ereignisses A berechnet man mit:

$$\boldsymbol{P(\mathrm{A})} = \frac{\textbf{Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\textbf{Anzahl der möglichen Ergebnisse}} = \frac{|\mathrm{A}|}{|\Omega|}$$

Einmaliger Würfelwurf

$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}, \quad |\Omega| = 6$

A: "Augenzahl ist gerade", $\quad \mathrm{A} = \{2; 4; 6\}, \quad |\mathrm{A}| = 3$

$P(\mathrm{A}) = \frac{|\mathrm{A}|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\%$

Einmaliger Münzwurf

$\Omega = \{K; Z\}, \quad |\Omega| = 2$

$P(K) = P(Z) = \frac{1}{2} = 50\%$

M 8.15

Bestimmung von Anzahlen

Ziehen mit Zurücklegen

Zieht man aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln k-mal mit Zurücklegen, so gibt es

$\boldsymbol{n^k}$ Möglichkeiten.

Ziehen ohne Zurücklegen

Zieht man aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln k-mal ohne Zurücklegen, so gibt es

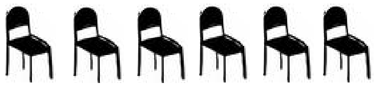
$\boldsymbol{n \cdot (n-1) \ldots \cdot (n-k+1)}$ Möglichkeiten.

Sonderfall: Anordnung

Zieht man alle Kugeln, so gibt es

$\boldsymbol{n \cdot (n-1) \ldots \cdot 1 = n!}$ Möglichkeiten

Wie viele Möglichkeiten gibt es für ein vierstelliges Zahlenschloss? $10^4 = 10000$	Wie viele Möglichkeiten gibt es, sechs Personen auf sechs Stühlen anzuordnen? $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! = 720$



M 8.16

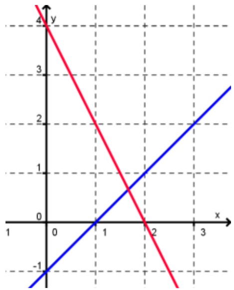
Lineare Gleichungssysteme I

Zwei lineare Gleichungen mit zwei gleichen Variablen bilden ein **lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen.**

$$\begin{aligned} (I)\quad & ax + by = c \\ (II)\quad & dx + ey = f \end{aligned}$$

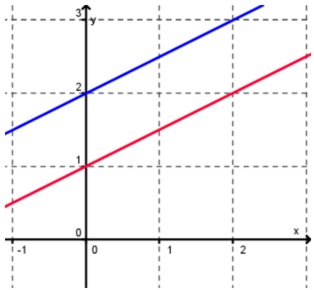
Die Gleichungen lassen sich durch Geraden graphisch darstellen (→ Auflösen nach y).

$$\begin{aligned} (I)\quad & y - x = -1 \\ (II)\quad & y + 2x = 4 \end{aligned}$$



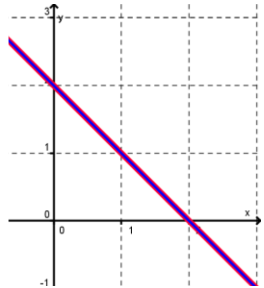
eine Lösung

$$\begin{aligned} (I)\quad & 2y - x = 4 \\ (II)\quad & 2y - x = 2 \end{aligned}$$



keine Lösung

$$\begin{aligned} (I)\quad & 2{,}5x + 2{,}5y = 5 \\ (II)\quad & x + y = 2 \end{aligned}$$



Unendlich viele Lösungen

M 8.17

Lineare Gleichungssysteme II

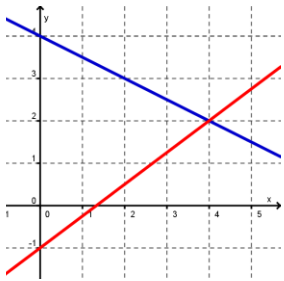
$$(I)\quad \boldsymbol{x+2y=8} \quad\Rightarrow\quad (I')\ \boldsymbol{y=-0,5x+4}$$
$$(II)\ \boldsymbol{3x-4y=4} \quad\Rightarrow\quad (II')\ \boldsymbol{y=0,75x-1}$$

Graphische Lösung

$(I')\ y=-0{,}5x+4$

$(II')\ y=0{,}75x-1$

$\Rightarrow L=\{(4;2)\}$



Gleichsetzungsverfahren

$$(I')=(II')$$
$$-0{,}5x+4=0{,}75x-1\ |-0{,}75x-4$$
$$-1{,}25x=-5\quad |:(-1{,}25)$$
$$x=4$$

$y=-0{,}5\cdot 4+4=2$

$\Rightarrow L=\{(4;2)\}$

Einsetzungsverfahren

(II') *in* (I): $x+2(0{,}75x-1)=8$

$$2{,}5x-2=8\ |+2$$
$$2{,}5x=10\ |:2{,}5$$
$$x=4$$

$y=0{,}75\cdot 4-1=2$

$\Rightarrow L=\{(4;2)\}$

Additionsverfahren

$\boldsymbol{2\cdot(I)+(II)}$: $2x+4y+3x-4y=16+4$

$$5x=20\ |:5$$
$$x=4$$

$4+2y=8\ \Rightarrow y=2$

$\Rightarrow L=\{(4;2)\}$

M 8.18

Umfang und Flächeninhalt des Kreises

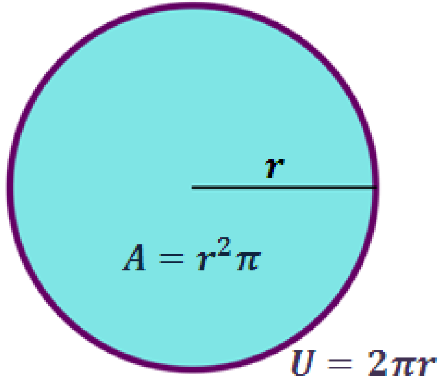
Umfang

$\boldsymbol{U = \pi \cdot d}$

$\boldsymbol{U = 2 \cdot \pi \cdot r}$

Flächeninhalt

$\boldsymbol{A = r^2 \cdot \pi}$



Kreiszahl $\boldsymbol{\pi = 3,141592654\ldots}$

(π ist keine rationale Zahl)

$k(M; 3\text{ cm})$ [„Kreis um M mit Radius 3 cm"]

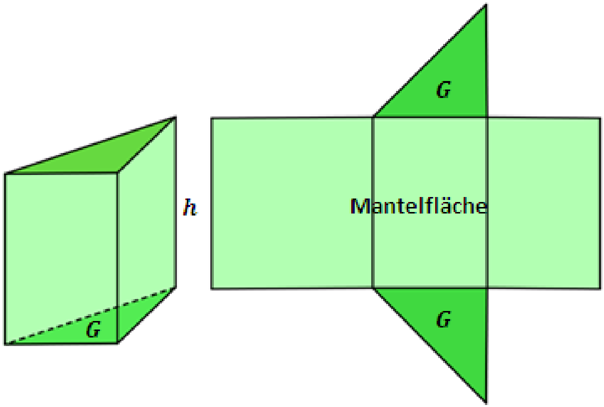
$\Rightarrow U = 2\pi \cdot 3\text{ cm} \approx 18{,}85\text{ cm}$

$\Rightarrow A = (3\text{ cm})^2 \cdot \pi \approx 28{,}27\text{ cm}^2$

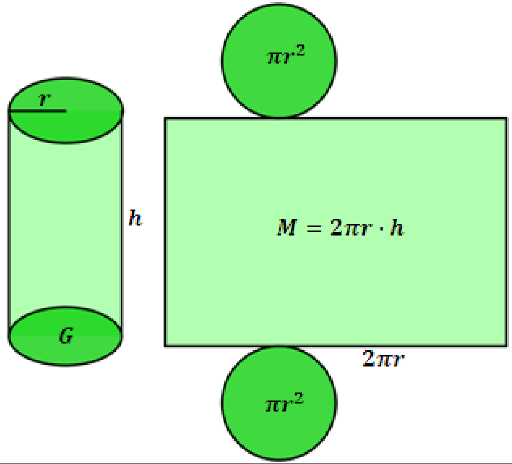
M 8.19

Prisma und Zylinder

Prisma



Zylinder



Volumen: $\boldsymbol{V}$ **= Grundfläche · Höhe**

Oberfläche: $\boldsymbol{O = 2G + M}$

$V_{Prisma} = G \cdot h$	$V_{Zylinder} = G \cdot h = \pi r^2 \cdot h$ $O_{Zylinder} = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h$