



Ein **Term** ist ein Rechenausdruck, der aus Zahlen, Rechenzeichen, Klammern und Variablen besteht.

$$3x - 7$$

$$a^2 + 3b^2$$

Die **Variablen** sind Stellvertreter für Zahlen und werden durch Buchstaben dargestellt. a, b, x, y, \dots

Setzt man für die Variablen Zahlen ein, so kann man den zugehörigen **Termwert** berechnen. Für gleiche Variablen müssen gleiche Zahlen eingesetzt werden.

$$T(y; z) = 3y - 2z + y^2$$

Einsetzen von **4** für **y** und **5** für **z**: $T(4; 5) = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 + 4^2$

$$T(x) = x^2 - 4$$

$$T(-1) = (-1)^2 - 4 = -3 \quad ; \quad T(2) = 2^2 - 4 = 0$$



M 7.2

Umformungen von Summen und Produkten

Zwei Terme heißen **äquivalent**, wenn *jede* Einsetzung von Zahlen für die Variablen jeweils die gleichen Termwerte ergeben. Mit Hilfe der Rechengesetze können wir Terme in äquivalente Terme umformen.

$$T(x) = x + (2x - 5) = 3x - 5$$

Umformungen in Produkten	Gleiche Faktoren können zu Potenzen zusammengefasst werden.	$5 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot c = 5a^2b^3c$
--------------------------	---	--

Produkte, die sich nur im Zahlenfaktor unterscheiden, heißen **gleichartig**.



gleichartig: $3xz^2$, $\frac{1}{2}xz^2$, $-2z^2x$, xz^2 **dazu nicht gleichartig:** $3x^2z$, $-5z^2$, $2xz$



Umformungen in Summen	Gleichartige Terme können zusammengefasst werden.	$3x^2y + 2x^2y = 5x^2y$
-----------------------	---	-------------------------

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot a - b^2 + 3,5ba^2 + b \cdot 4 \cdot b = 0,5a^2b + 3,5a^2b - b^2 + 4b^2 = 4a^2b + 3b^2$$

M 7.3

Rechenregeln für Potenzen



Potenzen mit der gleichen Basis werden multipliziert, indem man die Exponenten addiert.	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$(-x)^2 \cdot (-x)^4 = (-x)^6 = x^6$
Ein Produkt wird potenziert, indem man den Exponenten auf jeden Faktor verteilt.	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(-2x)^2 = (-2)^2 \cdot x^2 = 4x^2$
Eine Potenz wird potenziert, indem man die Exponenten multipliziert.	$(a^n)^m = a^{n \cdot m} = a^{nm}$	$(-x^3)^2 = (-x)^6 = x^6$

$$3 \cdot 4 \cdot a^2 \cdot b \cdot a^3 \cdot b^4 = 12a^5b^5 ; \left(-\frac{1}{2}z\right)^2 = \frac{1}{4}z^2 ; (3a^3)^2 = 9a^6 ; (-b)^7 = -b^7$$

Auflösen von Klammern



Klammerregeln

Plus vor der Klammer
alle Vorzeichen in der Klammer
beibehalten

$$a + (b + c) = a + b + c$$

$$3 + (-x - 2) = 3 - x - 2$$

Minus vor der Klammer
alle Vorzeichen in der Klammer
umdrehen

$$a - (+b + c) = a - b - c$$

$$3 - (-x - 2) = 3 + x + 2$$

Distributivgesetz

Ausmultiplizieren
Produkt \rightarrow Summe

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$4x \cdot (3 - x) = 12x - 4x^2$$

$$(-2x) \cdot (-x + 3x^2 - 1) = 2x^2 - 6x^3 + 2x$$

Ausklammern (Faktorisieren)
Summe \rightarrow Produkt

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$$

$$12x - 4x^2 = 4x \cdot (3 - x)$$

$$-2ab^2 - 2a^2b = -2ab \cdot (b + a)$$

Multiplizieren von Summen



Jeder Summand der ersten Klammer wird mit jedem Summanden der zweiten Klammer multipliziert und diese Produkte werden addiert.

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$$

d	ad	bd
c	ac	bc
	a	b

Die binomischen Formeln

1. Binomische Formel: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ **Plus-Formel**
2. Binomische Formel: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ **Minus-Formel**
3. Binomische Formel: $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$ **Plus-Minus-Formel**

$$(-a + 1) \cdot (3a^2 - 1) = -3a^3 + a + 3a^2 - 1$$

$$(3x - 2)^2 = 9x^2 - 12x + 4$$



Punkte, die auf der Symmetrieachse liegen – **und nur diese** –, sind von zueinander symmetrischen Punkten gleich weit entfernt.

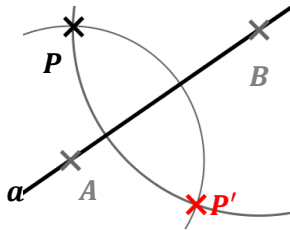
Eigenschaften achsensymmetrischer Figuren

- Die Verbindungsstrecke zwischen Punkt und Bildpunkt wird von der Symmetrieachse senkrecht halbiert.
- Symmetrische Strecken sind gleich lang (Längentreue).
- Symmetrische Winkel sind gleich groß (Winkeltreue).
- Der Umlaufsinn von Figuren ändert sich.

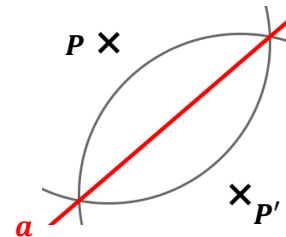
Konstruktionen



Konstruktion des **Bildpunktes P'**



Konstruktion der **Achse a**



M 7.7

Grundkonstruktionen



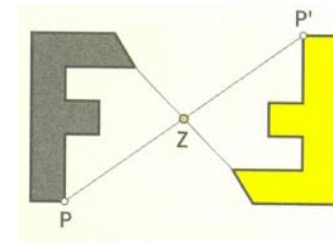
Mittelsenkrechte	Winkelhalbierende
Lot errichten	Lot fällen



Figuren, die bei einer Drehung um 180° um einen Punkt Z mit sich selbst zur Deckung kommen, heißen **punktsymmetrisch**.

Eigenschaften punktsymmetrischer Figuren

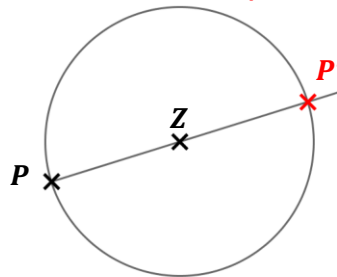
- Die Verbindungsstrecke zwischen Punkt und Bildpunkt wird vom Symmetriezentrum halbiert.
- Symmetrische Strecken sind gleich lang (Längentreue).
- Symmetrische Winkel sind gleich groß (Winkeltreue).
- Der Umlaufsinn von Figuren ändert sich nicht.



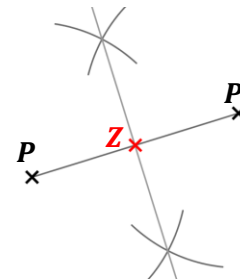
Konstruktionen



Konstruktion des **Bildpunktes P'**

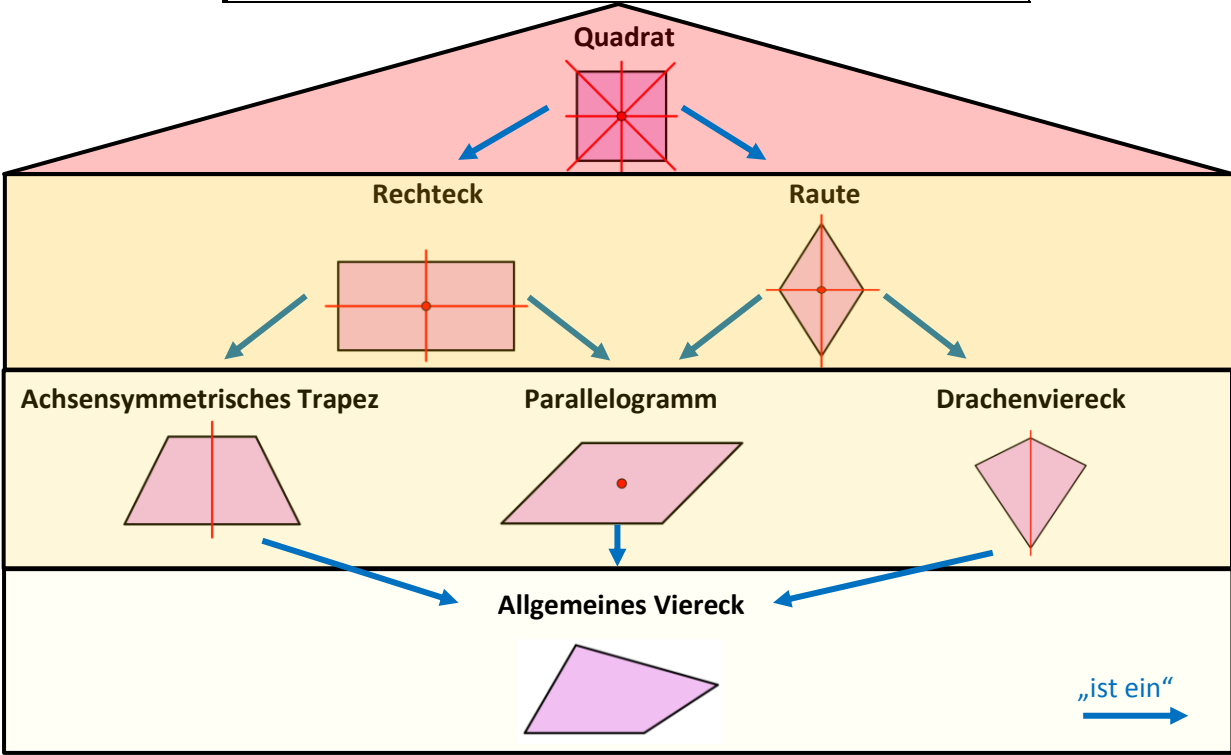


Konstruktion des **Symmetriezentrums Z**



M 7.9

Symmetrische Vierecke „Haus der Vierecke“

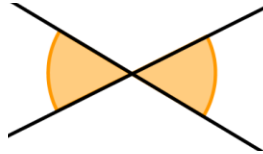


M 7.10

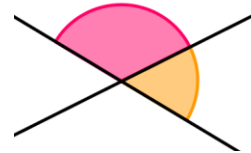
Winkel an Geraden



Winkel an einer Geradenkreuzung

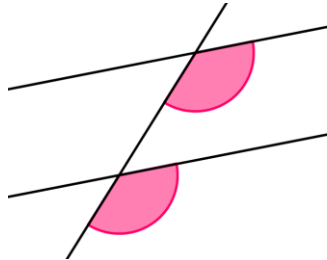


Scheitelwinkel sind gleich groß.

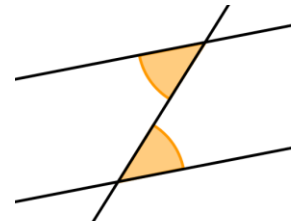


Nebenwinkel ergänzen sich zu 180° .

Winkel an einer Doppelkreuzung



Stufenwinkel an parallelen Geraden sind gleich groß.



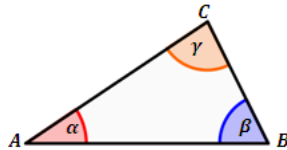
Wechselwinkel an parallelen Geraden sind gleich groß.

M 7.11

Winkelsummen



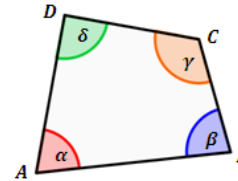
Dreieck



In einem Dreieck beträgt die Summe der Innenwinkel 180° .

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Viereck

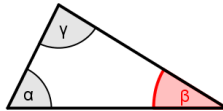


In einem Viereck beträgt die Summe der Innenwinkel 360° .

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$$

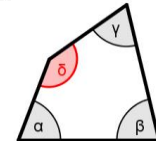
$$\alpha = 64^\circ, \gamma = 85^\circ$$

$$\begin{aligned} \beta &= 180^\circ - \alpha - \gamma = \\ &= 180^\circ - 64^\circ - 85^\circ = 31^\circ \end{aligned}$$



$$\alpha = 70^\circ, \beta = 77^\circ, \gamma = 68^\circ$$

$$\begin{aligned} \delta &= 360^\circ - \alpha - \beta - \gamma = \\ &= 360^\circ - 70^\circ - 77^\circ - 68^\circ = 145^\circ \end{aligned}$$



Vieleck

In einem Vieleck mit n Ecken beträgt die Summe der Innenwinkel $(n - 2) \cdot 180^\circ$

M 7.12

Gleichungen



Eine **Gleichung** besteht aus zwei Termen, die durch ein Gleichheitszeichen verbunden sind.

Die **Grundmenge G** gibt an, welche Zahlen anstelle der Variablen eingesetzt werden dürfen.

Die **Lösungsmenge L** enthält alle Zahlen, die beim Einsetzen eine wahre Aussage ergeben.

$$4x - 5 = 3, \quad G = \mathbb{Q}$$

$$L = \{2\}$$

denn $4 \cdot 2 - 5 = 3$ ist wahr

$$2a - 4 = 5 + 5a, \quad G = \mathbb{Q}$$

$$L = \{-3\}$$

denn $2 \cdot (-3) - 4 = 5 + 5 \cdot (-3)$ ist wahr

M 7.13

Lösen von Gleichungen



Mit Hilfe von **Äquivalenzumformungen** kann eine Gleichung nach der Variablen aufgelöst werden. Die Lösungsmenge ändert sich dabei nicht.

4 Schritte	Lösen linearer Gleichungen	Äquivalenzumformung
Termumformung Beide Seiten vereinfachen	$9x - (2x - 5) = 3 \cdot (x + 1) + x - 13$ $9x - 2x + 5 = 3x + 3 + x - 13$ $7x + 5 = 4x - 10$	<ul style="list-style-type: none"> • Klammern auflösen /ausmultiplizieren • Gleichartige Terme zusammenfassen
Trennen x -Terme auf die eine Seite, Terme ohne x auf die andere Seite bringen	$7x + 5 = 4x - 10 \quad /-4x$ $3x + 5 = -10 \quad /-5$ $3x = -15$	Addieren oder Subtrahieren des gleichen Terms oder der gleichen Zahl auf beiden Seiten
x isolieren Koeffizient „wegbringen“	$3x = -15 \quad /:3$ $x = -5$	Multiplizieren oder Dividieren mit der gleichen Zahl ($\neq 0$) auf beiden Seiten
Lösung	$x = -5$ $L = \{-5\}$	Lösungsmenge angeben, falls verlangt (evtl. Grundmenge beachten)



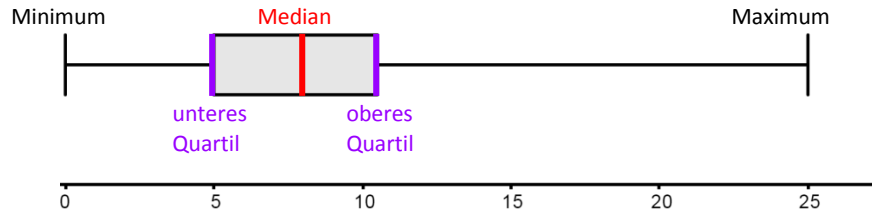
Der Wert, der in der Mitte eines geordneten Datensatzes steht, heißt **Median**. Bei einer geraden Anzahl an Daten bildet man das arithmetische Mittel aus den beiden in der Mitte stehenden Werten.

Das **untere (obere) Quartil** ist der Median der unteren (oberen) Hälfte des Datensatzes. Quartile unterteilen den Datensatz in vier gleich große Teile.



Die **Spannweite** gibt die Differenz aus dem größten und kleinsten Wert an.

Zur Veranschaulichung verwendet man **Boxplots**.



M 7.15

Kongruenz und Kongruenzsätze



Deckungsgleiche Figuren F und G nennt man **zueinander kongruent**: $F \cong G$

Kongruenzsätze für Dreiecke

Zwei Dreiecke sind bereits kongruent, wenn sie

- in drei Seiten übereinstimmen (**SSS**).
- in einer Seite und zwei gleichliegenden Winkeln übereinstimmen (**WSW** oder **SWW**).
- in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen (**SWS**).
- in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der längeren Seite übereinstimmen (**SsW**).

SSS



WSW



SWW



SWS



SsW



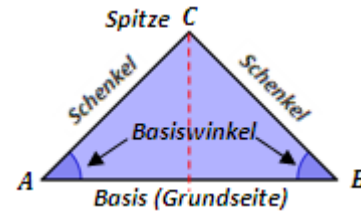
M 7.16

Besondere Dreiecke



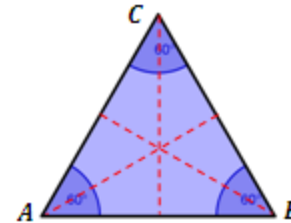
Ein Dreieck mit zwei gleich langen Seiten heißt **gleichschenkliges Dreieck**.

- achsensymmetrisch
- Basiswinkel sind gleich groß

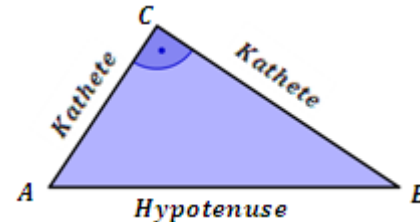


Ein Dreieck mit drei gleich langen Seiten heißt **gleichseitiges Dreieck**.

- drei Symmetrieachsen
- drei 60° -Winkel



Ein Dreieck mit einem rechten Winkel heißt **rechtwinkliges Dreieck**.



M 7.17

Satz des Thales



Ein Dreieck ABC hat genau dann bei C einen rechten Winkel, wenn die Ecke C auf einem Kreis mit dem Durchmesser \overline{AB} liegt.

Mathematische Sätze werden häufig in der Form „Wenn...(Voraussetzung), dann...(Behauptung)“ formuliert. Vertauscht man Voraussetzung und Behauptung, erhält man den Kehrsatz.

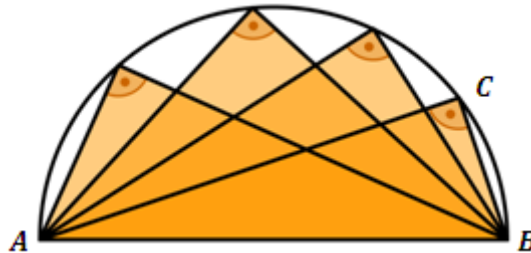
„genau dann..., wenn...“ bedeutet, dass sowohl Satz als auch Kehrsatz wahr sind.



Satz

Wenn die Ecke C auf einem Kreis mit Durchmesser \overline{AB} liegt, **dann** hat das Dreieck ABC bei C einen rechten Winkel.

Thales von Milet
(ca. 625 - 545 v. Chr.)



Kehrsatz

Wenn das Dreieck ABC bei C einen rechten Winkel hat, **dann** liegt die Ecke C auf einem Kreis mit Durchmesser \overline{AB} .

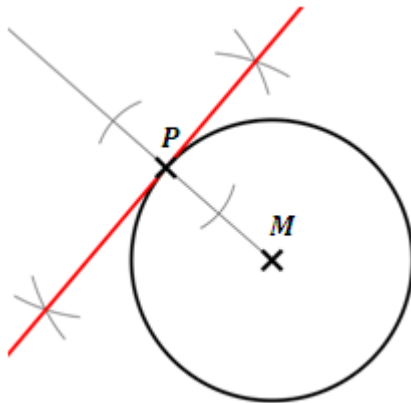
M 7.18

Konstruktion von Kreistangenten



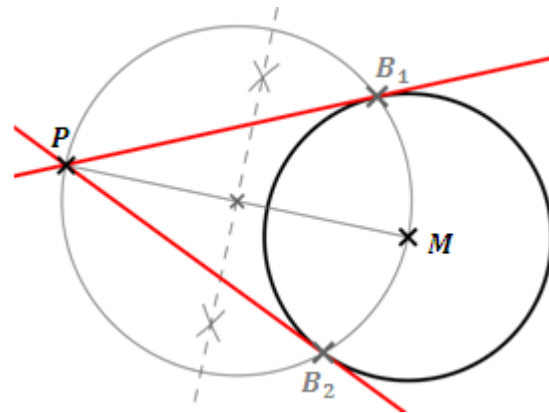
P liegt auf dem Kreis

- 1) Zeichne die Halbgerade $[MP$
- 2) Errichte in P das Lot zu $[MP$
→ **Tangente**



P liegt außerhalb des Kreises

- 1) Zeichne die Strecke \overline{MP}
- 2) Konstruiere den Mittelpunkt von \overline{MP} und damit den Thaleskreis über der Strecke \overline{MP}
- 3) Verbinde die Schnittpunkte der beiden Kreise B_1 und B_2 mit P → **Tangenten**



M 7.19

Dreieckskonstruktionen



		$c = 3 \text{ cm} , b = 3,5 \text{ cm} , \beta = 75^\circ$
1. Schritt Planfigur	Zeichne ein beliebiges Dreieck und markiere darin die gegebenen Stück farbig.	
2. Schritt Konstruktionsplan	Schreibe auf, wie du nacheinander die Eckpunkte der gesuchten Figur erhältst.	<p>(1) A und B sind durch $\overline{AB} = c$ gegeben.</p> <p>(2) C liegt</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. auf dem Kreis $k(A; r = b)$ 2. auf dem freien Schenkel des Winkels β, angetragen in B an AB
3. Schritt Konstruktion	Konstruiere das Dreieck wie im Plan beschrieben nur mit Zirkel und Lineal.	

M 7.20

Besondere Linien im Dreieck



Höhen	Mittelsenkrechten	Winkelhalbierende
<p data-bbox="199 588 566 845"></p>	<p data-bbox="638 408 941 520">Die Mittelsenkrechten schneiden sich im Umkreismittelpunkt.</p> <p data-bbox="598 565 981 957"></p>	<p data-bbox="1037 420 1356 532">Die Winkelhalbierenden schneiden sich im Inkreismittelpunkt.</p> <p data-bbox="1005 565 1388 856"></p>