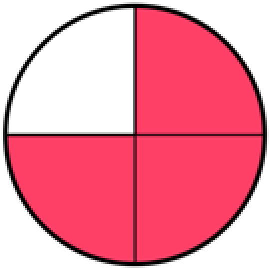
M 6.1

Brüche

Brüche beschreiben Bruchteile.



$$\frac{3}{4}$$

Der **Zähler** gibt an, dass man 3 von diesen Teilen nimmt.

Bruchstrich

Der **Nenner** gibt an, dass das Ganze in 4 Teile zerlegt wird.

$$\frac{3}{4} \text{ von } 100 \text{ kg} = \left(\frac{1}{4} \text{ von } 100 \text{ kg}\right) \cdot 3 = (100 \text{ kg} : 4) \cdot 3 = 25 \text{ kg} \cdot 3 = 75 \text{ kg}$$

Die Schokoladentafel hat 14 Stückchen, d.h. ein Stückchen entspricht dem Anteil

$$\frac{1}{14}$$

M 6.2

Prozentschreibweise

Anteile werden häufig in **Prozent** angegeben. „Prozent“ heißt „Hundertstel“.

$$\frac{3}{100} = 3\%$$

Häufig vorkommende Prozentsätze

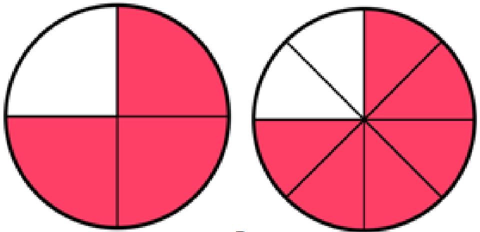
<table>
<tr><td></td><td colspan="4">$1 = 100\%$</td></tr>
<tr><td>Nenner 2</td><td colspan="4">$\frac{1}{2} = 50\%$</td></tr>
<tr><td>Nenner 4</td><td colspan="2">$\frac{1}{4} = 25\%$</td><td colspan="2">$\frac{3}{4} = 75\%$</td></tr>
<tr><td>Nenner 5</td><td>$\frac{1}{5} = 20\%$</td><td>$\frac{2}{5} = 40\%$</td><td>$\frac{3}{5} = 60\%$</td><td>$\frac{4}{5} = 80\%$</td></tr>
<tr><td>Nenner 10</td><td>$\frac{1}{10} = 10\%$</td><td>$\frac{3}{10} = 30\%$</td><td>$\frac{7}{10} = 70\%$</td><td>$\frac{9}{10} = 90\%$</td></tr>
</table>

M 6.3

Erweitern und Kürzen

Kürzen

Zähler und Nenner werden durch dieselbe Zahl dividiert.



Erweitern

Zähler und Nenner werden mit derselben Zahl multipliziert.

$$\frac{3}{4} \underset{\text{Kürzen}\ :2}{\overset{\cdot 2\ \text{Erweitern}}{=}} \frac{6}{8}$$

Durch Erweitern und Kürzen ändert sich der Wert des Bruches nicht.

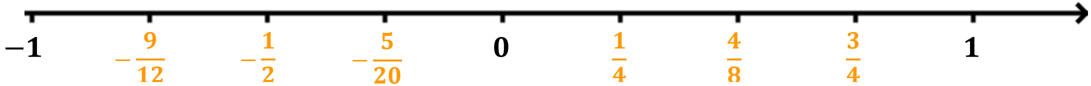
Kürzen	**Erweitern**
$\frac{3}{15} = \frac{3:\mathbf{3}}{15:\mathbf{3}} = \frac{1}{5}$; $\frac{6}{24} = \frac{6:\mathbf{2}}{24:\mathbf{2}} = \frac{3}{12} = \frac{3:\mathbf{3}}{12:\mathbf{3}} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} = \frac{1\cdot\mathbf{5}}{4\cdot\mathbf{5}} = \frac{5}{20}$; $\frac{2}{5} = \frac{2\cdot\mathbf{3}}{5\cdot\mathbf{3}} = \frac{6}{15}$

M 6.4	# Rationale Zahlen	

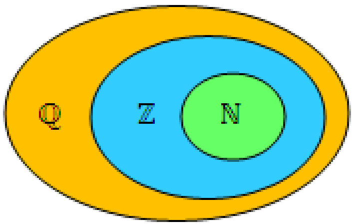
Zahlen, die man durch Brüche angeben kann, heißen **Bruchzahlen**. Eine Bruchzahl kann durch verschiedene wertgleiche Brüche angegeben werden.

$$\frac{1}{4}=\frac{2}{8}=\frac{4}{16}=\frac{5}{20}=\cdots;\quad \frac{1}{2}=\frac{4}{8}=\frac{3}{6}=\cdots;\quad -\frac{3}{4}=-\frac{9}{12}=\cdots;\quad 2=\frac{2}{1}=\frac{4}{2}=\cdots$$

Jede Bruchzahl hat einen Platz auf der Zahlengeraden.



Die positiven und die negativen Bruchzahlen bilden zusammen mit der 0 die **Menge der rationalen Zahlen** $\mathbb{Q}$.



Jeder Bruch kann als **Q**uotient geschrieben werden:

$$\frac{3}{5}=3:5$$

M 6.5

Vergleichen rationaler Zahlen

Brüche können verglichen werden, indem man sie durch Erweitern oder Kürzen auf denselben Nenner oder auf denselben Zähler bringt:

Hauptnenner = der kleinste gemeinsame Nenner, also das kgV der Nenner bei vollständig gekürzten Brüchen

- **Gleiche Nenner:** Der Bruch mit dem größeren Zähler ist größer

$$\frac{5}{7} > \frac{3}{7}$$

- **Gleiche Zähler:** Der Bruch mit dem kleineren Nenner ist größer

$$\frac{2}{3} > \frac{2}{5}$$

$$\frac{5}{12} = \frac{15}{36} \;;\; \frac{7}{18} = \frac{14}{36} \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{12} > \frac{7}{18}$$

Von zwei rationalen Zahlen ist diejenige größer, die weiter rechts auf der Zahlengeraden liegt.

M 6.6

Umwandeln von Brüchen in Dezimalbrüche

Bei **Dezimalbrüchen** bedeutet die erste Stelle nach dem Komma Zehntel, die zweite Hundertstel, die dritte Tausendstel,...

$$\mathbf{0{,}032} = \frac{32}{1000}$$

...	H	Z	T	,	z	h	t	zt	...
			0	,	**0**	**3**	**2**		

Methoden zum Umwandeln von Brüchen in Dezimalbrüche

Erweitern oder Kürzen zu einem Bruch mit Stufenzahl im Nenner	$\frac{2}{50} = \frac{4}{100} = 0{,}04$	$\frac{63}{70} = \frac{9}{10} = 0{,}9$
Schriftliches Dividieren	$\frac{1}{8} = 1 : 8 = 0{,}125$ **Endlicher Dezimalbruch**	$\frac{1}{6} = 1 : 6 = 0{,}16666\ldots = 0{,}1\overline{6}$ **Unendlicher periodischer Dezimalbruch**

Enthält der Nenner eines vollständig gekürzten Bruches nur die Primfaktoren 2 und 5, ergibt sich ein endlicher Dezimalbruch, andernfalls ein unendlicher.

M 6.7

Addition und Subtraktion von Brüchen

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$$

Gleichnamige Brüche
Zähler plus (minus) Zähler, Nenner beibehalten

$$\frac{2}{7}+\frac{4}{7}=\frac{6}{7} \qquad \frac{5}{7}-\frac{3}{7}=\frac{2}{7}$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cb}{bd}$$

Ungleichnamige Brüche
1. Brüche gleichnamig machen
2. Gleichnamige Brüche addieren (subtrahieren)

$$\frac{1}{6}+\frac{3}{4}=\frac{2}{12}+\frac{9}{12}=\frac{11}{12} \qquad \frac{5}{6}-\frac{3}{14}=\frac{35}{42}-\frac{9}{42}=\frac{26}{42}=\frac{13}{21}$$

Gemischte Zahlen
1. Gemischte Zahlen als Summen schreiben/denken
2. Ganze Zahlen zusammenrechnen, Brüche zusammenrechnen

$$3\frac{2}{5}+2\frac{1}{2}=3+\frac{2}{5}+2+\frac{1}{2}=3+2+\frac{2}{5}+\frac{1}{2}=5+\frac{4}{10}+\frac{5}{10}=5\frac{9}{10}$$

$$5\frac{1}{3}-2\frac{2}{3}=3\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=2\frac{4}{3}-\frac{2}{3}=2\frac{2}{3}$$

M 6.8

Multiplikation von Brüchen

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Bruch mal natürliche Zahl
Zähler mal Zahl, Nenner beibehalten

$$\frac{2}{7} \cdot 3 = \frac{2 \cdot 3}{7} = \frac{6}{7}$$

Bruch mal Bruch
Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 5} = \frac{2}{5}$$

Gemischte Zahlen

1. in unechte Brüche umwandeln
2. multiplizieren

$$3\frac{3}{5} \cdot 2\frac{1}{2} = \frac{18}{5} \cdot \frac{5}{2} = \frac{18 \cdot 5}{5 \cdot 2} = 9$$

„Von“ bedeutet in der Bruchteil-Regel „mal“

$$\frac{3}{4} \text{ von } 36 = \frac{3}{4} \cdot 36 = \frac{3 \cdot 36}{4} = 3 \cdot 9 = 27$$

M 6.9

Division von Brüchen

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c}$$

Bruch durch natürliche Zahl
Nenner mal Zahl, Zähler beibehalten

$$\frac{2}{7} : 3 = \frac{2}{7 \cdot 3} = \frac{2}{21}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Bruch durch Bruch
mit dem Kehrbruch multiplizieren

$$\frac{2}{3} : \frac{3}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 3} = \frac{10}{9} = 1\frac{1}{9}$$

Doppelbrüche
In Division umschreiben

$$\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{7}} = \frac{2}{5} : \frac{3}{7} = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{14}{15}$$

M 6.10

Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Potenzen mit negativen ganzzahligen Exponenten werden als Schreibweise für Brüche mit Zähler 1 verwendet:

$$5^{-1} = \frac{1}{5^{1}} \quad ; \quad 5^{-2} = \frac{1}{5^{2}} \quad ; \quad 5^{-3} = \frac{1}{5^{3}} \quad ; \quad \ldots$$

Beachte: $a^0 = 1$ für jede rationale Zahl $a \neq 0$

$$10^{-4} = \frac{1}{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{1}{10000}; \quad 3^{-5} = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243}; \quad \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{25}} = 1 : \frac{1}{25} = 1 \cdot \frac{25}{1} = 25; \quad 5^0 = 1$$

Schreibweise mit Zehnerpotenzen

$$3 \cdot 10^{-4} = \frac{3}{10000} = 0{,}0003$$

-4 gibt an, dass man das Komma um 4 Stellen nach links verschieben muss

$$107 \cdot 10^{-2} = \frac{107}{100} = 1{,}07; \quad 3{,}25 \cdot 10^{-3} = 0{,}00325$$

M 6.11

Rechnen mit Dezimalbrüchen

Addieren und Subtrahieren
Zahlen untereinander schreiben, so dass Komma unter Komma steht, und stellenweise rechnen.

$$\begin{array}{r} 23{,}075 \\ \underline{+0{,}0152} \\ 23{,}0902 \end{array}$$

Multiplizieren

1. Zahlen ohne Rücksicht auf die Kommas multiplizieren
2. Im Ergebnis das Komma so setzen, dass es so viele Nachkommastellen hat wie beide Faktoren zusammen

$$0{,}3 \cdot 0{,}25 = 0{,}075$$

Dividieren

1. In Dividend und Divisor das Komma so weit nach rechts verschieben, bis der Divisor eine natürliche Zahl ist
2. Überschreitet man beim Dividieren im Dividenden das Komma, wird im Ergebnis ein Komma gesetzt

$$0{,}015 : 0{,}75 = 1{,}5 : 75 = 0{,}02$$

M 6.12

Einteilung von Brüchen und Dezimalbrüchen

Brüche	**Echte Brüche** Zähler ist kleiner als Nenner	$\frac{2}{3}$
	Unechte Brüche Zähler ist größer als Nenner → Umwandlung in **gemischte Zahlen** (= Summe aus ganzer Zahl und echtem Bruch) möglich	$\frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$

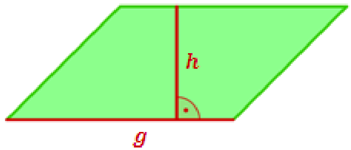
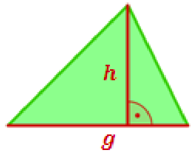
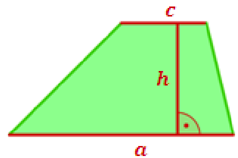
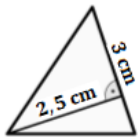
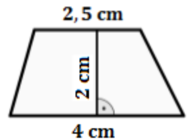
Dezimalbrüche	**Endliche Dezimalbrüche**	$\frac{13}{40} = 0{,}325$
	Unendliche periodische Dezimalbrüche	$\frac{4}{33} = 0,\overline{12}$ **reinperiodisch**
		$\frac{5}{12} = 0{,}4\overline{16}$ **gemischtperiodisch**

Wichtige Umrechnungen

$\frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$	$\frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$	$\frac{3}{4} = 0,75 = 75\%$	$\frac{1}{8} = 0,125 = 12,5\%$
$\frac{1}{3} = 0,\overline{3} = 33,\overline{3}\%$	$\frac{2}{3} = 0,\overline{6} = 66,\overline{6}\%$	$\frac{1}{6} = 0,1\overline{6} = 16,\overline{6}\%$	$\frac{1}{9} = 0,\overline{1} = 11,\overline{1}\%$
$\frac{1}{5} = 0,2 = 20\%$	$\frac{2}{5} = 0,4 = 40\%$	$\frac{3}{5} = 0,6 = 60\%$	$\frac{4}{5} = 0,8 = 80\%$

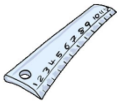
M 6.13

Flächenformeln

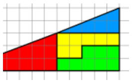
Parallelogramm	Dreieck	Trapez
		
Parallelogrammfläche $=$ Grundlinie $\cdot$ zugehöriger Höhe	Dreiecksfläche $= \frac{1}{2} \cdot$ Grundlinie $\cdot$ zugehöriger Höhe	Trapezfläche $= \frac{1}{2} \cdot$ (Summe der parallelen Seiten) $\cdot$ Höhe
$\boldsymbol{A_P = g \cdot h}$	$\boldsymbol{A_D = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{g} \cdot \mathrm{h}}$	$\boldsymbol{A_T = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h}$
 $A = 2{,}5\ \text{cm} \cdot 2\ \text{cm} = 5\ \text{cm}^2$	 $A = \frac{1}{2} \cdot 3\ \text{cm} \cdot 2{,}5\ \text{cm} = 3{,}75\ \text{cm}^2$	 $A = \frac{1}{2} \cdot (4\ \text{cm} + 2{,}5\ \text{cm}) \cdot 2\ \text{cm} = 6{,}5\ \text{cm}^2$

M 6.14

Umrechnung von Länge, Fläche und Volumen



Länge	**Umrechnungszahl 10**		
1 km = 1000 m	1 m = 10 dm	1 dm = 10 cm	1 cm = 10 mm

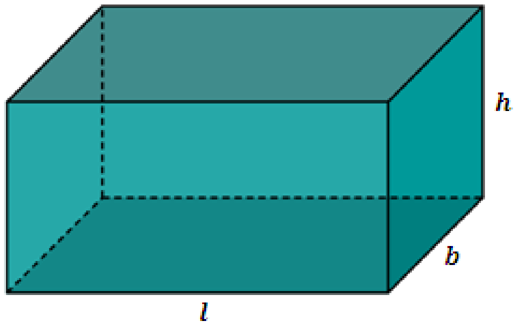


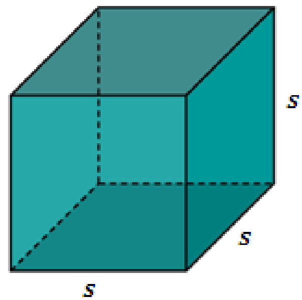
Fläche	**Umrechnungszahl 100**				
1 km^2 = 100 ha	1 ha = 100 a	1 a = 100 m^2	1 m^2 = 100 dm^2	1 dm^2 = 100 cm^2	1 cm^2 = 100 mm^2

Volumen	**Umrechnungszahl 1000**			
1 m^3 = 1000 dm^3	1 dm^3 = 1000 cm^3	1 cm^3 = 1000 mm^3		
Speziell:	1 l = 1 dm^3	1 ml = 1 cm^3	1 hl = 100 l	1 l = 1000 ml

M 6.15

Volumen des Quaders





Quadervolumen = Länge · Breite · Höhe	Würfelvolumen = Seite · Seite · Seite
$\boldsymbol{V = l \cdot b \cdot h}$	$\boldsymbol{V = s \cdot s \cdot s = s^3}$

$l = 2\text{ cm}, b = 3\text{ cm}, h = 1{,}5\text{ cm}$: $V = l \cdot b \cdot h = 2\text{ cm} \cdot 3\text{ cm} \cdot 1{,}5\text{ cm} = 9\text{ cm}^3$

$s = 3\text{ cm}$: $V = s^3 = (3\text{ cm})^3 = 27\text{ cm}^3$

M 6.16

Relative Häufigkeit

Absolute Häufigkeit = Anzahl, mit der ein bestimmter Wert auftritt

Relative Häufigkeit = Anteil dieser Anzahl an der Gesamtanzahl

$$\textbf{Relative Häufigkeit} = \frac{\textbf{absolute Häufigkeit}}{\textbf{Gesamtzahl}}$$

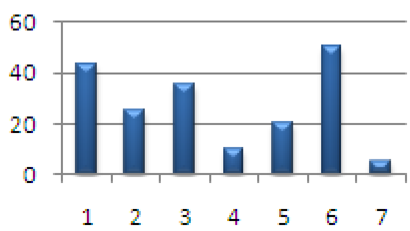
Beispiel: 5-mal würfeln **Ergebnisse**: 

Absolute Häufigkeit für das Ergebnis „2“: $\mathbf{2}$ Relative Häufigkeit für das Ergebnis „2“: $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}} = \mathbf{40\%}$

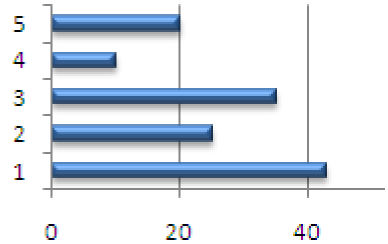
M 6.17

Diagramme

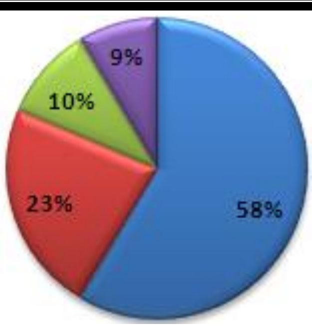
Säulendiagramm



Balkendiagramm



Kreisdiagramm



$$\mathbf{100\% \triangleq 360°}$$
$$\mathbf{1\% \triangleq 3{,}6°}$$

Streifendiagramm

M 6.18

Prozentrechnung

PW

PS • GW

25% *von* $16€$ $=$ $4€$

Prozentsatz = Bruchteil vom Ganzen · **Grundwert** = das Ganze = **Prozentwert** = wie viel der Anteil ausmacht

3 Aufgabentypen

Prozentsatz gesucht	Grundwert gesucht	Prozentwert gesucht
Wie viel Prozent sind 8 von 40? z.B.: $x \cdot 40 = 8$ $\Rightarrow x = 8 : 40 = \frac{8}{40} = \frac{1}{5} = 20\%$	15% vom Grundwert sind 9 € Berechne den Grundwert. z.B.: $15\% \triangleq 9\,€$ $:3 \downarrow \quad \downarrow :3$ $5\% \triangleq 3\,€$ $\cdot 20 \downarrow \quad \downarrow \cdot 20$ $100\% \triangleq 60€$	Wie viel sind 20% von 55 kg? z.B.: 20% von 55 kg $=$ $= 20\% \cdot 55\text{ kg} = \frac{1}{5} \cdot 55\text{ kg} =$ $= 11\text{ kg}$

M 6.19

Arithmetisches Mittel

Den Durchschnittswert oder Mittelwert bezeichnet man als **arithmetisches Mittel**.

$$\textbf{arithmetisches Mittel} = \frac{\textbf{Summe der einzelnen Werte}}{\textbf{Gesamtzahl an Werten}}$$

Beispiel: Notenverteilung in der 4. Schulaufgabe

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	5	3	2	2

Arithmetisches Mittel:

$$\frac{1+2+2+3+3+3+3+3+4+4+4+5+5+6+6}{15} =$$

$$= (1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 6) : 15 = 54 : 15 = 3{,}6$$