

M 5.1

Natürliche Zahlen und Zahlenstrahl



Die Zahlen 1, 2, 3, 4, ... fasst man zur **Menge der natürlichen Zahlen** zusammen:

$$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; 4; \dots\}$$

Nimmt man auch die 0 hinzu, schreibt man:

$$\mathbb{N}_0 = \{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$$

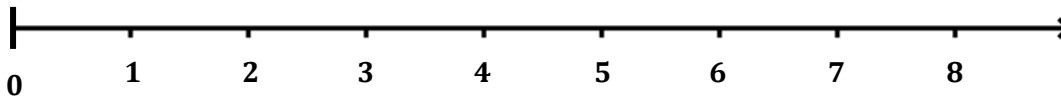
„Die Zahl 12 ist ein Element der Menge der natürlichen Zahlen“:

$$12 \in \mathbb{N}$$

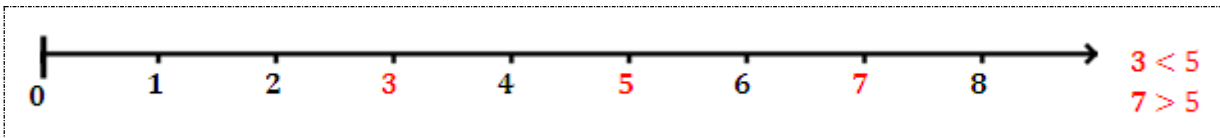
„Die Zahl 0 ist kein Element der Menge der natürlichen Zahlen“:

$$0 \notin \mathbb{N}$$

Zahlenstrahl



Je weiter rechts eine Zahl auf dem Zahlenstrahl liegt, desto größer ist sie.





Große Zahlen kann man mit Hilfe der **Stellenwerttabelle** leichter lesen:

...	Billionen			Milliarden			Millionen			Tausender					
...	HBio	ZBio	Bio	HMrd	ZMrd	Mrd	HMio	ZMio	Mio	HT	ZT	T	H	Z	E
	2	3	5	7	1	0	2	6	6	7	0	0	3	2	2

In Worten: *zweihundertfünfunddreißig Billionen siebenhundertzehn Milliarden zweihundertsechundsechzig Millionen siebenhunderttausenddreihundertzweiundzwanzig*

Die Zahlen 1, 10, 100, 1000, 10000, ... heißen **Stufenzahlen**.

Mit der **Potenzschreibweise** kann man sie kürzer schreiben:

		1 Million	=	10^6
		1 Milliarde	=	10^9
		1 Billion	=	10^{12}
		1 Billiarde	=	10^{15}
		1 Trillion	=	10^{18}
		1 Trilliarde	=	10^{21}
	$100 = 10 \cdot 10$		=	10^2
	$1000 = 10 \cdot 10 \cdot 10$		=	10^3
	$10000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$		=	10^4
	$100000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$		=	10^5



Beim Runden einer Zahl auf eine bestimmte Stelle betrachtet man die rechts von dieser Stelle stehende Ziffer:

- Ist diese Ziffer eine **0, 1, 2, 3** oder **4**, so wird **abgerundet**.
- Ist diese Ziffer eine **5, 6, 7, 8** oder **9**, so wird **aufgerundet**.

Man verwendet das Zeichen „ \approx “ („ist ungefähr gleich“).

	5368	10745
Runden auf Zehner	≈ 5370	≈ 10750
Runden auf Hunderter	≈ 5400	≈ 10700
Runden auf Tausender	≈ 5000	≈ 11000

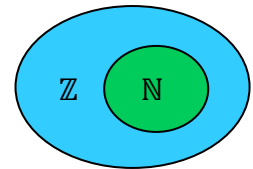


M 5.4

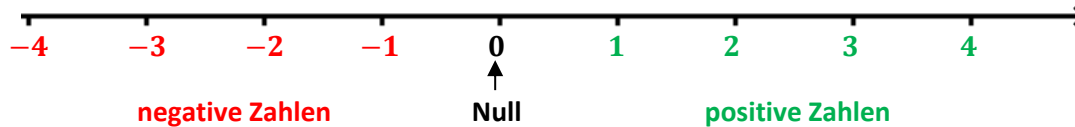
Ganze Zahlen und Zahlengerade

Die Menge der natürlichen Zahlen wird mit der Null und den negativen Zahlen zur

Menge der ganzen Zahlen: $\mathbb{Z} = \{ \dots; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; \dots \}$



Zahlengerade



Den Abstand einer Zahl von der Null nennt man **Betrag** der Zahl: $|-5| = 5$

$|-4| = 4;$ $|4| = 4;$ $|-29| = 29;$ $|0| = 0$

↖ ↗
Gegenzahlen



Ein **Koordinatensystem** besteht

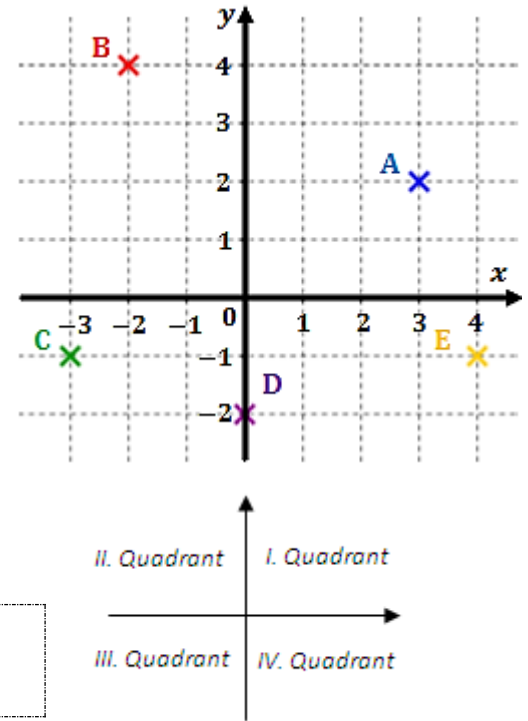
- aus einer waagrechten Zahlengeraden: **x-Achse**
- und einer senkrechten Zahlengeraden: **y-Achse**

Der Schnittpunkt der Achsen heißt **Ursprung**.

Jeder Punkt im Koordinatensystem lässt sich durch ein Zahlenpaar beschreiben:

$A(3|2)$
 „vom Ursprung 3 waagrecht“ x -Koordinate
 „dann 2 senkrecht“ y -Koordinate

$B(-2|4)$; $C(-3|-1)$; $D(0|-2)$; $E(4|-1)$



M 5.6

Terme und Gleichungen



Ein **Term** ist ein Rechenausdruck, der Zahlen, Rechenzeichen, Klammern und Platzhalter (Variablen) enthalten kann.



Die zuletzt auszuführende Rechenart legt die Art des Terms fest.

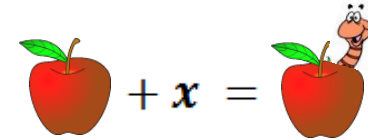
$$30 + 8 : 2$$

Summe

$$435 - [32 \cdot (3 + 7)]$$

Differenz

Eine **Gleichung** besteht aus zwei Termen, die durch ein Gleichheitszeichen verbunden sind.



Gleichungen löst man durch Probieren oder mit Hilfe von Umkehraufgaben.

$$3 + x = 10$$

$$\text{Umkehraufgabe: } 10 - 3 = x$$

$$\text{Lösung: } x = 7$$

$$x - 12 = 5$$

$$\text{Umkehraufgabe: } 5 + 12 = x$$

$$\text{Lösung: } x = 17$$

M 5.7

Fachbegriffe für die Rechenarten



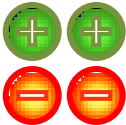
Beispiel	Name des Terms	Die erste Zahl heißt	Die zweite Zahl heißt	Rechenart
$5 + 3$	Summe	1. Summand	2. Summand	Addition
$5 - 3$	Differenz	Minuend	Subtrahend	Subtraktion
$5 \cdot 3$	Produkt	1. Faktor	2. Faktor	Multiplikation
$5 : 3$	Quotient	Dividend	Divisor	Division
5^3	Potenz	Basis	Exponent	Potenzieren

M 5.8

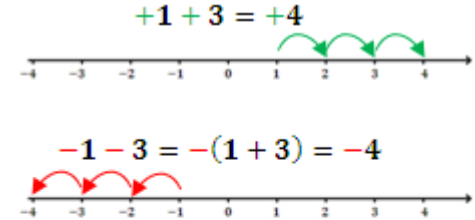
Addition und Subtraktion ganzer Zahlen



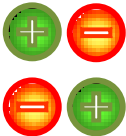
Addition bei gleichem Vorzeichen



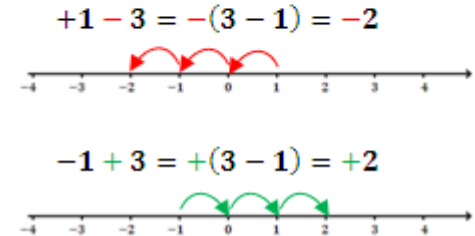
- Addiere die Beträge
- Das Ergebnis erhält das gemeinsame Vorzeichen



Addition bei unterschiedlichem Vorzeichen



- Subtrahiere den kleineren Betrag vom größeren Betrag
- Das Ergebnis erhält das Vorzeichen der Zahl mit dem größeren Betrag



Auflösen von Klammern

$$-4 + (+3) = -4 + 3$$

$$-4 + (-3) = -4 - 3$$


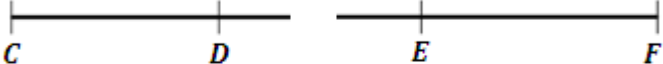
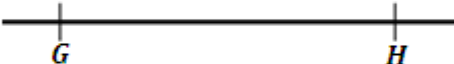
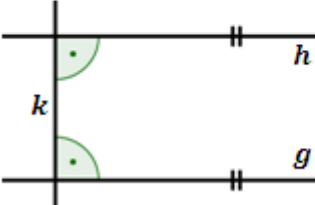
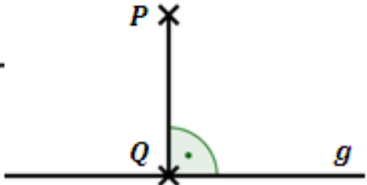
$$-4 - (-3) = -4 + 3$$

$$-4 - (+3) = -4 - 3$$



M 5.9

Geometrische Grundbegriffe

Strecke	\overline{AB}	
Streckenlänge	$ \overline{AB} = 5,2 \text{ cm}$	
Halbgerade	$[CD \text{ und } EF]$	
Gerade	GH	
g ist parallel zu h	$g \parallel h$	
g ist senkrecht zu k oder: g ist ein Lot zu k	$g \perp k$	
Abstand eines Punktes P von einer Geraden g	$ \overline{PQ} = 2,1 \text{ cm}$	

M 5.10

Kreis

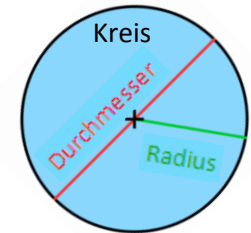


Ein **Kreis** ist die Menge aller Punkte, die von einem **Mittelpunkt M** den gleichen Abstand haben. Diesen Abstand nennt man **Radius**.

Schreibweise: $k(M; r)$

Lagebeziehungen und Schreibweisen

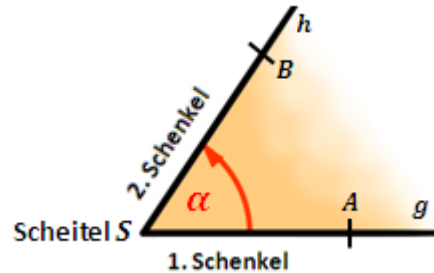
Punkt B liegt auf der Tangente t	$B \in t$	
Punkt B liegt nicht auf der Sekante s	$B \notin s$	
Punkt B liegt auf dem Kreis k	$B \in k(M; r)$	





Dreht sich eine Halbgerade gegen den Uhrzeigersinn um ihren Anfangspunkt S , so entsteht ein **Winkel**.

$$\alpha = \sphericalangle(g, h) = \sphericalangle ASB$$



α	alpha
β	beta
γ	gamma
δ	delta
ε	epsilon

Arten von Winkel

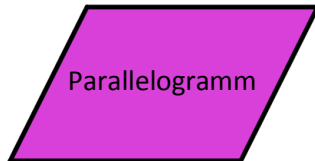
Spitzer Winkel	Rechter Winkel	Stumpfer Winkel	Gestreckter Winkel	Überstumpfer Winkel
$0^\circ < \alpha < 90^\circ$	$\alpha = 90^\circ$	$90^\circ < \alpha < 180^\circ$	$\alpha = 180^\circ$	$180^\circ < \alpha < 360^\circ$



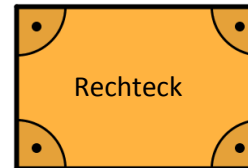
- zwei gegenüberliegende Seiten sind parallel



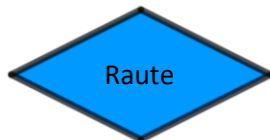
- zwei benachbarte Seiten sind jeweils gleich lang



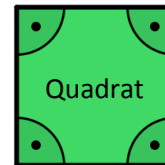
- gegenüberliegende Seiten sind jeweils parallel



- gegenüberliegende Seiten sind jeweils parallel
- vier rechte Winkel



- gegenüberliegende Seiten sind jeweils parallel
- alle Seiten sind gleich lang



- gegenüberliegende Seiten sind jeweils parallel
- alle Seiten sind gleich lang
- vier rechte Winkel

M 5.13

Rechnen mit 0 und 1



0		1	
$0 \cdot 5 = 0$	$5 \cdot 0 = 0$	$1 \cdot 5 = 5$	$5 \cdot 1 = 5$
$0 : 5 = 0$		$5 : 1 = 5$	

Nie durch Null dividieren!



M 5.14

Rechengesetze



Kommutativgesetz

Vertauschungsgesetz

$$a + b = b + a$$

oder

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Assoziativgesetz

Verbindungsgesetz

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

oder

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

Distributivgesetz

Verteilungsgesetz

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

oder

$$(a + b) : c = a : c + b : c$$

Rechenvorteile

$$64 + (78 + 36) = 64 + (36 + 78) = (64 + 36) + 78 = 100 + 78 = 178$$

$$4 \cdot (27 \cdot 25) = 4 \cdot (25 \cdot 27) = (4 \cdot 25) \cdot 27 = 100 \cdot 27 = 2700$$

$$36 \cdot 13 + 36 \cdot 7 = 36 \cdot (13 + 7) = 36 \cdot 20 = 720$$

$$99 \cdot 43 = (100 - 1) \cdot 43 = 100 \cdot 43 - 1 \cdot 43 = 4300 - 43 = 4257$$

M 5.15

Potenzieren



Für Produkte mit gleichen Faktoren gibt es eine Kurzschreibweise:

Die **Potenzschreibweise**

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{6 \text{ Faktoren}} = 2^6 \leftarrow \text{Exponent}$$

↑
Basis



Zehnerpotenzen				
$10^1 = 10$	$10^2 = 100$	$10^3 = 1000$	$10^4 = 10000$	$10^5 = 100000$

Quadratzahlen				
$1^2 = 1$	$6^2 = 36$	$11^2 = 121$	$16^2 = 256$	$21^2 = 441$
$2^2 = 4$	$7^2 = 49$	$12^2 = 144$	$17^2 = 289$	$22^2 = 484$
$3^2 = 9$	$8^2 = 64$	$13^2 = 169$	$18^2 = 324$	$23^2 = 529$
$4^2 = 16$	$9^2 = 81$	$14^2 = 196$	$19^2 = 361$	$24^2 = 576$
$5^2 = 25$	$10^2 = 100$	$15^2 = 225$	$20^2 = 400$	$25^2 = 625$

Primfaktorzerlegung



Eine **Primzahl** ist eine natürliche Zahl größer als 1, die nur durch 1 und sich selbst teilbar ist.

Jede natürliche Zahl ist entweder eine Primzahl oder lässt sich in ein Produkt aus Primzahlen zerlegen.

Diese eindeutige Zerlegung heißt **Primfaktorzerlegung**.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

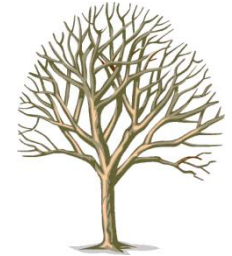
$$165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$$

$$20 = 4 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5$$

$$720 = 72 \cdot 10 = 8 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$$

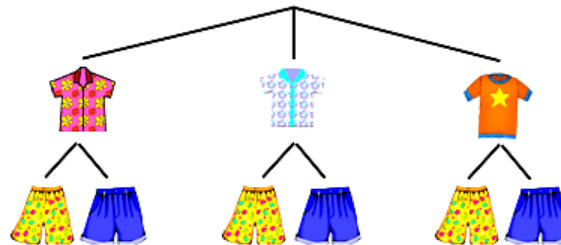
M 5.17

Baumdiagramme und Zählprinzip



Situationen, bei denen man mehrere Dinge auswählen und miteinander kombinieren muss, kann man mit einem **Baumdiagramm** darstellen. Die Anzahl der Baumenden entspricht der Anzahl an Möglichkeiten. Bei einem „regelmäßigen“ Baumdiagramm kann man diese auch berechnen, indem man die Anzahlen der Wahlmöglichkeiten auf jeder Stufe multipliziert (**Zählprinzip**).

Herr Huber hat für den Strandurlaub drei Hemden und zwei Shorts dabei. Wie viele Kombinationsmöglichkeiten hat er?



Es gibt $3 \cdot 2 = 6$ Möglichkeiten.

M 5.18

Multiplikation und Division ganzer Zahlen



1.

Multipliziere (Dividiere) die Beträge.

2.

- Sind die Vorzeichen **gleich**, so ist das Ergebnis **positiv**.
- Sind die Vorzeichen **verschieden**, so ist das Ergebnis **negativ**.



Multiplikation	Division
$3 \cdot 4 = 12$ $(-3) \cdot (-4) = 12$	$30 : 5 = 6$ $(-30) : (-5) = 6$
$3 \cdot (-4) = -12$ $(-3) \cdot 4 = -12$	$30 : (-5) = -6$ $(-30) : 5 = -6$

· :	+	-
+	+	-
-	-	+

M 5.19

Vorrangregeln



Klammern

vor

Potenzen

vor

Punktrechnungen

vor

Strichrechnungen



Bei reinen Punkt- oder
Strichrechnungen:
Von links nach rechts
rechnen

Und was noch nicht zum
Rechnen dran, das
schreibe unverändert
an!

$$15 - 3 \cdot 4 + 5 = 15 - 12 + 5 = 3 + 5 = 8$$

$$30 - 3 \cdot 2^3 = 30 - 3 \cdot 8 = 30 - 24 = 6$$

$$25 - 2 \cdot (5 - 2)^2 = 25 - 2 \cdot 3^2 = 25 - 2 \cdot 9 = 25 - 18 = 7$$

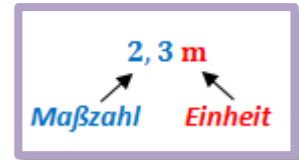
$$[5 + (4 - 1)^3] : 8 + 6 = [5 + 3^3] : 8 + 6 = [5 + 27] : 8 + 6 = 32 : 8 + 6 = 4 + 6 = 10$$

M 5.20

Größen



Größe	Einheiten				
Länge	1 mm	1 cm	1 dm	1 m	1 km
		· 10	· 10	· 10	· 1000
Masse	1 mg	1 g	1 kg	1 t	
		· 1000	· 1000	· 1000	
Geld	1 ct	1 €			
		· 100			
Zeit	1 s	1 min	1 h	1 d	
		· 60	· 60	· 24	



$1,5 \text{ m} = 15 \text{ dm}$; $3800 \text{ mm} = 380 \text{ cm} = 38 \text{ dm}$ $2,58 \text{ €} = 258 \text{ ct}$; $5600 \text{ ct} = 56 \text{ €}$
 $0,02 \text{ t} = 20 \text{ kg} = 20000 \text{ g}$; $300 \text{ mg} = 0,3 \text{ g}$ $1 \text{ d} = 24 \text{ h} = 1440 \text{ min}$; $640 \text{ s} = 10 \text{ min } 40 \text{ s}$

Rechnen mit Größen: $2 \text{ g} + 450 \text{ mg} = 2000 \text{ mg} + 450 \text{ mg} = 2450 \text{ mg} = 2,45 \text{ g}$
 $2 \text{ kg} \cdot 5 = 10 \text{ kg}$; $20 \text{ kg} : 5 = 4 \text{ kg}$; $30 \text{ kg} : 6 \text{ kg} = 5$

M 5.21

Dreisatz



3 kg Äpfel kosten 2,40 €. Wie viel kosten 5 kg?

$$\begin{array}{l} :3 \\ \left. \begin{array}{l} 3 \text{ kg kosten } 2,40 \text{ €} \\ 1 \text{ kg kostet } 2,40 \text{ €} : 3 = 0,80 \text{ €} \\ 5 \text{ kg kosten } 0,80 \text{ €} \cdot 5 = \mathbf{4,00 \text{ €}} \end{array} \right\} :3 \\ \cdot 5 \end{array}$$

Ein Dachdecker braucht für zwei Dächer 16 Stunden. Wie lange braucht er für drei Dächer?

$$\begin{array}{l} :2 \\ \left. \begin{array}{l} \text{für 2 Dächer braucht er } 16 \text{ h} \\ \text{für 1 Dach braucht er } 16 \text{ h} : 2 = 8 \text{ h} \\ \text{für 3 Dächer braucht er } 8 \text{ h} \cdot 3 = \mathbf{24 \text{ h}} \end{array} \right\} :2 \\ \cdot 3 \end{array}$$



Ein **Maßstab** von 1 : 100 bedeutet, dass in Wirklichkeit alles 100-mal so lang wie auf dem Plan ist.

Maßstab: 1 : 5 000 Länge auf dem Plan: 3 cm	→	Länge in Wirklichkeit $3 \text{ cm} \cdot 5\,000 = 15\,000 \text{ cm} = 150 \text{ m}$
Maßstab: 1 : 100 Länge in Wirklichkeit: 3 m	→	Länge auf dem Plan $3 \text{ m} : 100 = 300 \text{ cm} : 100 = 3 \text{ cm}$
Länge in Wirklichkeit: 6 km Länge auf dem Plan: 2 cm	→	Maßstab $6 \text{ km} : 2 \text{ cm} = 600\,000 \text{ cm} : 2 \text{ cm} = 300\,000 : 1$

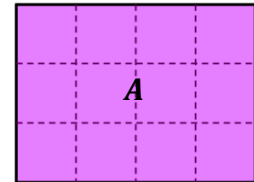
M 5.23

Flächeneinheiten



Die Größe der eingeschlossenen Fläche einer Figur nennt man **Flächeninhalt A**.

$$\text{Länge} \cdot \text{Länge} = \text{Fläche}$$



Flächeneinheiten und ihre Umrechnung

Quadrat- millimeter	Quadrat- zentimeter	Quadrat- dezimeter	Quadrat- meter	Ar	Hektar	Quadrat- kilometer
1 mm ²	1 cm ²	1 dm ²	1 m ²	1 a	1 ha	1 km ²

· 100 · 100 · 100 · 100 · 100 · 100

$$1 \text{ cm}^2 = 100 \text{ mm}^2$$

$$2,4 \text{ a} = 240 \text{ m}^2$$

$$12345 \text{ cm}^2 = 123,45 \text{ dm}^2 = 1,2345 \text{ m}^2$$



$$3 \text{ ha} = 0,03 \text{ km}^2$$

$$4 \text{ a} - 50 \text{ m}^2 = 400 \text{ m}^2 - 50 \text{ m}^2 = 350 \text{ m}^2 = 3,5 \text{ a}$$

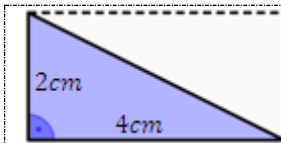
M 5.24

Flächeninhalt des Rechtecks



Rechteck	Quadrat
	
$A_R = \text{Länge} \cdot \text{Breite}$ $A_R = l \cdot b$	$A_Q = \text{Seitenlänge} \cdot \text{Seitenlänge}$ $A_Q = s \cdot s = s^2$

Den Flächeninhalt zusammengesetzter Figuren berechnet man, indem man sie in Rechtecke **zerlegt** oder zu Rechtecken **ergänzt**.



Der Flächeninhalt des Dreiecks ist halb so groß wie der des Rechtecks.

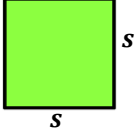
$$A_D = A_R : 2 = (2 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm}) : 2 = 8 \text{ cm}^2 : 2 = 4 \text{ cm}^2$$


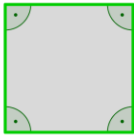
M 5.25

Umfang



Der **Umfang** einer Figur ist die Länge ihrer Randlinie.

Rechteck	Quadrat
 $U_R = 2 \cdot l + 2 \cdot b$	 $U_Q = 4 \cdot s$

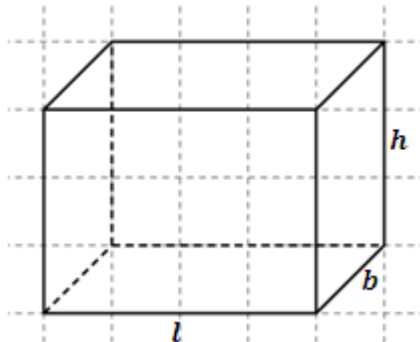
 $U = 2 \cdot 4 \text{ cm} + 2 \cdot 2,5 \text{ cm} = 13 \text{ cm}$	 $U = 4 \cdot 3 \text{ cm} = 12 \text{ cm}$
--	---

M 5.26

Schrägbilder



Die räumliche Darstellung eines Körpers nennt man **Schrägbild**.



$$l = 2 \text{ cm}, b = 1 \text{ cm}, h = 1,5 \text{ cm}$$

Zeichenregeln

- Die Vorderfläche wird in wahrer Größe gezeichnet.
- Nach hinten verlaufende Kanten werden parallel zu den Kästchendiagonalen und verkürzt gezeichnet:
 $1 \text{ cm} \triangleq 1 \text{ Kästchendiagonale}$

Beachte:

- Parallele Kanten sind auch im Schrägbild parallel.
- Rechte Winkel erscheinen im Schrägbild nicht immer als rechte Winkel.

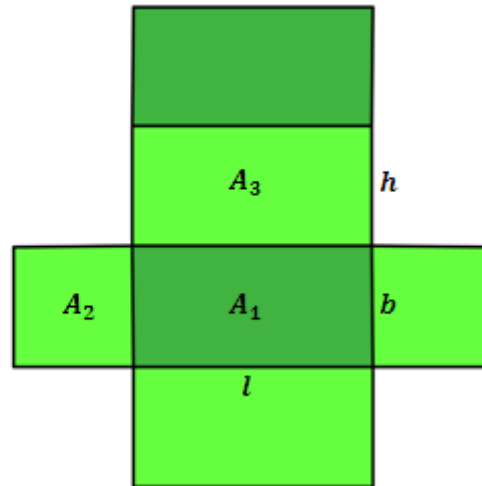
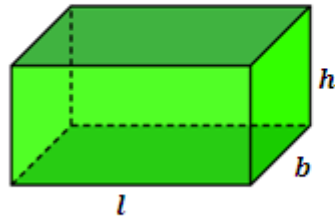
M 5.27

Oberflächeninhalt



Der **Oberflächeninhalt O** eines Körpers ist gleich dem Flächeninhalt seines **Netzes**.

Beispiel: **Schrägbild und Netz eines Quaders**



$$O = 2A_1 + 2A_2 + 2A_3 = 2 \cdot (l \cdot b + b \cdot h + l \cdot h)$$

$$l = 2 \text{ cm}, \quad b = 1 \text{ cm}, \quad h = 1 \text{ cm}$$

$$O = 2 \cdot (A_1 + A_2 + A_3) = 2 \cdot (2 \text{ cm}^2 + 1 \text{ cm}^2 + 2 \text{ cm}^2) = 10 \text{ cm}^2$$