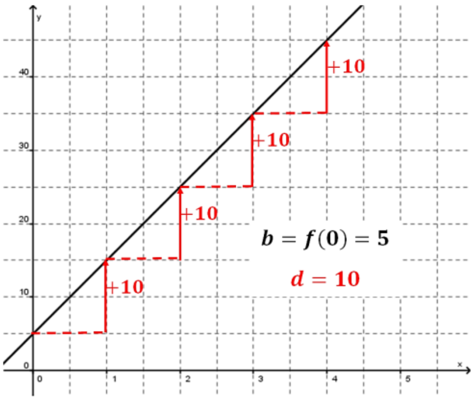
M 10.1

Lineares und exponentielles Wachstum

Lineares Wachstum

Konstanter Zuwachs pro Zeiteinheit

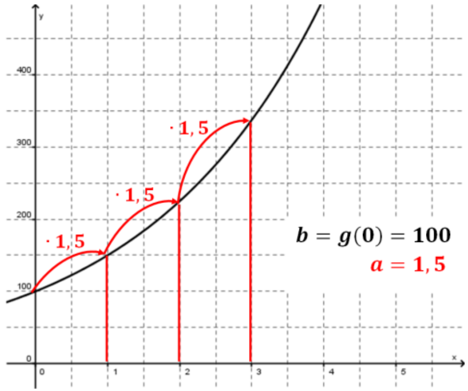


Nimmt die Größe x um 1 zu, so wächst die Größe y stets um einen festen Summanden d.

$$y = b + x \cdot d$$

Exponentielles Wachstum

Konstanter Wachstumsfaktor in gleichen (Zeit-) Schritten



Nimmt die Größe x um 1 zu, so wächst die Größe y stets um einen festen Faktor a.

$$y = b \cdot a^x$$

M 10.2

Exponentialfunktion

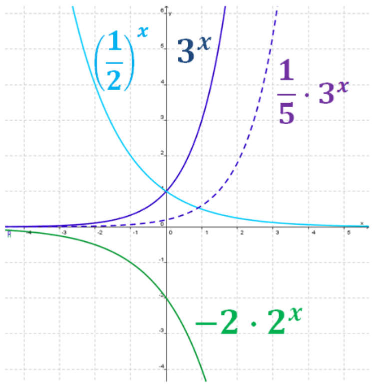
Funktionen der Form $f(x) = b \cdot a^x$ ($D_f = \mathbb{R}$, $b \neq 0$, $a > 0$, $a \neq 1$) heißen Exponentialfunktionen. Die Konstante a gibt den **Wachstumsfaktor** an. Die Konstante b gibt den **Anfangswert** der Funktion für $x = 0$ an, also ist $f(0) = b$.

Für $a > 1$ steigt der Graph
→ **Wachstum**

Für $a < 1$ fällt der Graph
→ **negatives Wachstum**

Der Graph verläuft durch den Punkt $(0; b)$.

Die x-Achse ist Asymptote.



Ist $b \neq 1$, so wird der Graph in y-Richtung mit dem Faktor b gestreckt ($|b| > 1$) bzw. gestaucht ($|b| < 1$).

Ist $b < 0$, so wird der gestreckte/gestauchte Graph zusätzlich an der x-Achse gespiegelt.

Spiegelt man den Graphen von $f(x) = ba^x$ an der y-Achse,
so erhält man den Graphen von $g(x) = b \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^x$ und umgekehrt.

M 10.3

Exponentialgleichungen und Logarithmus

Gleichungen, bei denen die gesuchte Variable als Exponent vorkommt, nennt man **Exponentialgleichungen**.

Die eindeutige Lösung der Exponentialgleichung $a^x = b$ (für $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$) bezeichnet man als **Logarithmus von $\boldsymbol{b}$ zur Basis $\boldsymbol{a}$** und schreibt $x = \log_a b$:

$$a^x = b \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a b$$

$$2^9 = 512 \quad \Leftrightarrow \quad \log_2 512 = 9$$

Lösen von Gleichungen:

$$3^x = 81 \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_3 81 = 4$$

Rechenregel und spezielle Logarithmen:

- $\boldsymbol{\log_a(b^c) = c \cdot \log_a b}$
- $\log_a 1 = 0$ (denn: $a^0 = 1$)
- $\log_b(b^x) = x \qquad a^{\log_a x} = x$

M 10.4

Mehrstufige Zufallsexperimente

Ein Zufallsexperiment, das aus mehreren Teilexperimenten besteht, nennt man **mehrstufiges Zufallsexperiment.**

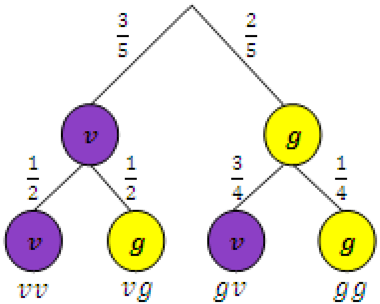
1. **Pfadregel**
   Die **Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses** ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades.
2. **Pfadregel**
   Die **Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses** ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten für die zugehörigen Ergebnisse.

Aus einer Urne mit zwei gelben und drei violetten Kugeln werden nacheinander zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

$\Omega = \{vv; vg; gv; gg\}$

$P(vv) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$

$P(zwei\ gleiche\ Kugeln) = P(\{vv; gg\}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{5}$

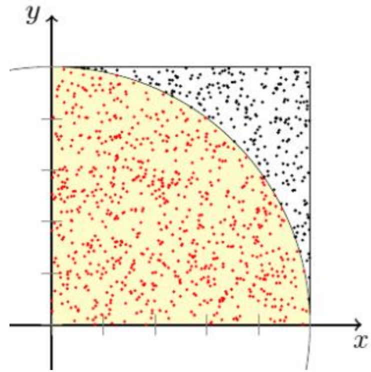


M 10.5

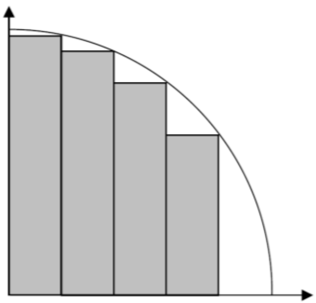
Näherungsweise Bestimmung von π

Mit der **Monte-Carlo-Methode** kann die Kreiszahl π näherungsweise bestimmt werden:

Es werden zufällig Punkte in einem Quadrat mit Seitenlänge 1 verteilt, dem ein Viertelkreis einbeschrieben ist. Bezeichnet man mit P die Anzahl der Punkte im Viertelkreis und mit N die Gesamtanzahl der Punkte, so gilt für große N:



$$\frac{P}{N} \to \frac{\pi}{4}$$

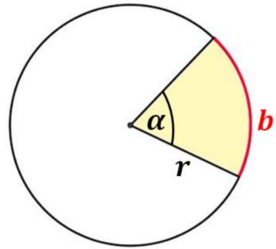


Ein alternatives Verfahren zur näherungsweise Bestimmung von π ist z.B. die näherungsweise Berechnung der Fläche des Viertelkreises mit Hilfe von einbeschriebenen Streifen (**Streifenmethode**).

M 10.6

Bogenmaß

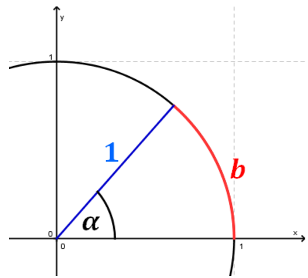
In einem Kreis mit Radius r gilt für einen **Kreissektor** mit Mittelpunktswinkel α:



Länge des Kreisbogens

$$\boldsymbol{b} = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2r\pi$$

Die Länge des zugehörigen Kreisbogens im Einheitskreis ($r = 1$) bezeichnet man als **Bogenmaß** b eines Winkels α:



Umrechnungsformeln:

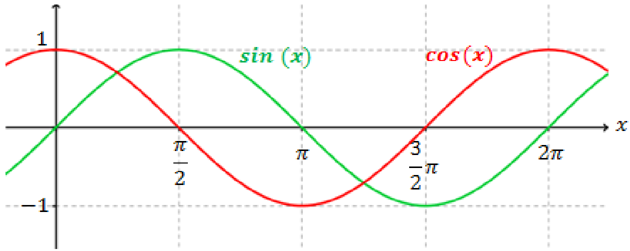
$$\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{180°} \cdot \pi \qquad \boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{b}}{\pi} \cdot 180°$$

Besondere Werte:

Gradmaß $\boldsymbol{\alpha}$	$\mathbf{30°}$	$\mathbf{45°}$	$\mathbf{60°}$	$\mathbf{90°}$	$\mathbf{180°}$	$\mathbf{270°}$	$\mathbf{360°}$
Bogenmaß $\boldsymbol{b}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

M 10.7

Sinus- & Kosinusfunktion



α im Gradmaß	x im Bogenmaß	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$90°$	$\frac{\pi}{2}$	1	0
$180°$	π	0	-1

Eigenschaften:

Sinusfunktion $\sin(x)$	***Kosinusfunktion $\cos(x)$***
periodisch mit der Periode 2π	periodisch mit der Periode 2π
$\sin(x) = \sin(x + k \cdot 2\pi)\,,k \in \mathbb{Z}$	$\cos\,(x) = \cos\,\,(x + k \cdot 2\pi)\,,k \in \mathbb{Z}$

Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$

Wertemenge $W = [-1; 1]$

Man erhält den Graphen der Kosinusfunktion, indem man den der Sinusfunktion um $\frac{\pi}{2}$ in negative x-Richtung verschiebt.

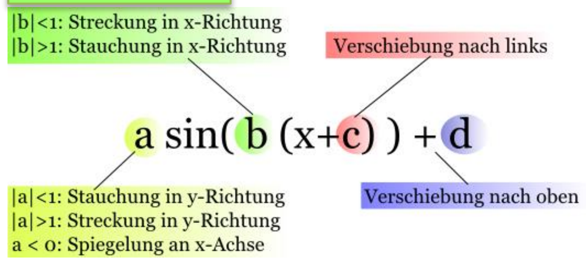
M 10.8

Die allgemeine Sinusfunktion

Durch die allgemeine Sinusfunktion $f(x) = \color{#c8c800}{a} \cdot \sin\big(\color{#00b050}{b}(x + \color{red}{c})\big) + \color{#7030a0}{d}$ lassen sich beliebige sinusförmige Graphen beschreiben:

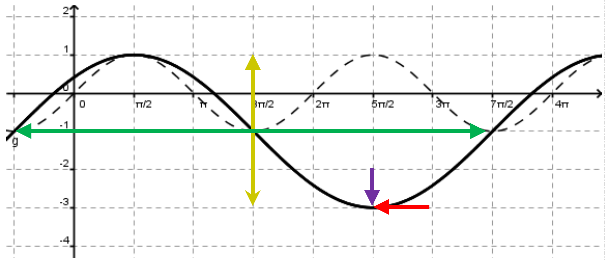
- a: Streckung/Stauchung in y-Richtung (Amplitude)
- b: Streckung/Stauchung in x-Richtung
- c: Verschiebung in x-Richtung
- d: Verschiebung in y-Richtung

Periode $p = \frac{2\pi}{|b|}$



$$g(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) - 1$$

- $a = 2$: Verdoppelte Amplitude
- $b = \frac{1}{2}$: Doppelte Periode (4π)
- $c = \frac{\pi}{2}$: Verschiebung um $\frac{\pi}{2}$ nach links
- $d = -1$: Verschiebung um 1 nach unten



M 10.9

Ganzrationale Funktionen

Potenzfunktionen

Grad

Koeffizienten

$$\underbrace{f(x) = \underbrace{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}_{\text{Polynom}}}_{\textbf{ganzrationale Funktion}}$$

Das Verhalten einer ganzrationalen Funktion im Unendlichen:

$$g(x) = -4x^5 + x^2 - 3$$

entscheidend für große $|x|$-Werte

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="2">höchster vorkommender Exponent (hier 5)</td></tr>
<tr><td>gerade</td><td>ungerade</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Leitkoeffizient a_n (hier -4)</td><td>$a_n > 0$</td><td>„von links oben nach rechts oben“</td><td>„von links unten nach rechts oben“</td></tr>
<tr><td>$a_n < 0$</td><td>„von links unten nach rechts unten“</td><td>„von links oben nach rechts unten“</td></tr>
</table>

M 10.10

Nullstellen ganzrationaler Funktionen

Methoden zur Bestimmung von Nullstellen (Grad n der ganzrationalen Funktion)

$n = 1$

Auflösen nach x

$n = 2$

- **Lösungsformel**
- **Auflösen nach x^2 und Wurzel ziehen** *(wenn möglich)*

$n \geq 2$

- **Ausklammern von x** *(wenn möglich)*
- **Getrennte Betrachtung der Faktoren** (wenn bereits faktorisiert)
- **Auflösen nach x^n** *(wenn möglich)*

$n = 4$

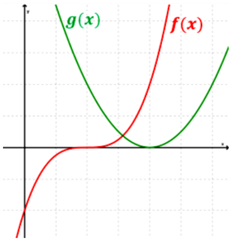
Substitution: $u = x^2$ *(wenn möglich)*
danach Lösen der quadratischen Gleichung *(z.B. Lösungsformel)*
am Ende Resubstitution

Faktorisierte Form: $f(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdot ...$

Vielfachheit von Nullstellen:

Tritt in der vollständig faktorisierten Form eine Nullstelle x_k

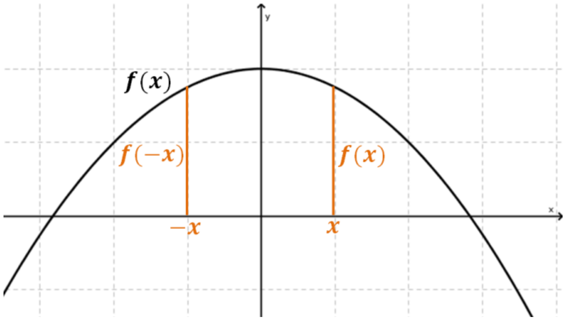
- **ungeradzahlig** oft auf, so wechselt $f(x)$ bei x_k das Vorzeichen,
- **geradzahlig** oft auf, so wechselt $g(x)$ bei x_k das Vorzeichen nicht.



M 10.11

Symmetrie von Funktionsgraphen

Achsensymmetrie zur y-Achse

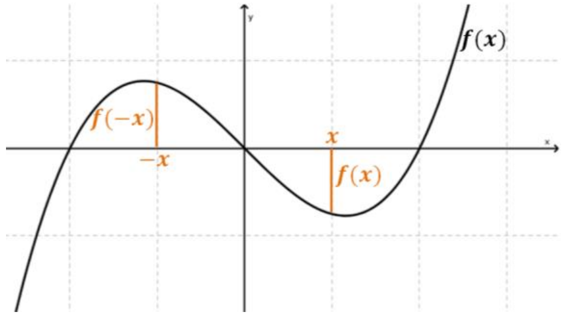


Gleich weit vom Nullpunkt entferte x-Werte besitzen stets denselben Funktionswert.

$$f(-x) = f(x)$$

Alle im Funktionsterm einer ganzrationalen Funktion vorkommenden Exponenten von x sind gerade.

Punktsymmetrie zum Ursprung



Gleich weit vom Nullpunkt entfernte x-Werte besitzen stets den betragmäßig gleichen Funktionswert mit unterschiedlichem Vorzeichen.

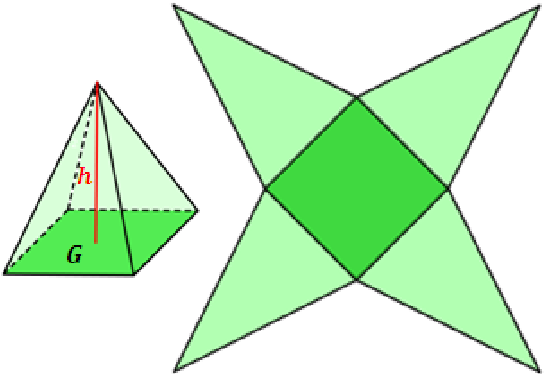
$$f(-x) = -f(x)$$

Alle im Funktionsterm einer ganzrationalen Funktion vorkommenden Exponenten von x sind ungerade.

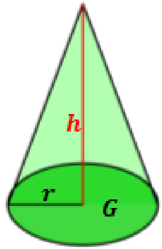
M 10.12

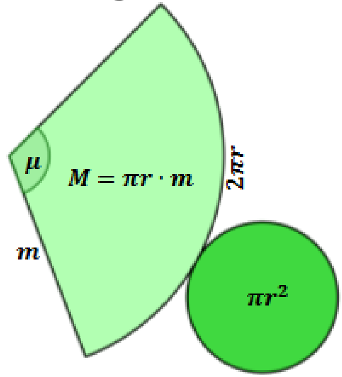
Pyramide und Kegel

Pyramide



Kegel





Volumen: $V = \frac{1}{3} \cdot Grundfläche \cdot Höhe$

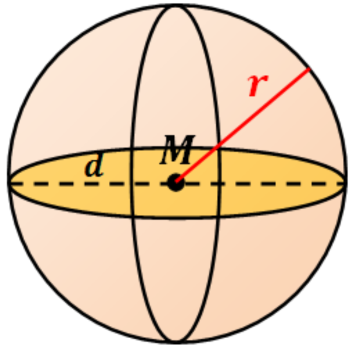
Oberfläche: $O = G + M$

$V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$	$V_{Kegel} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$ $O_{Kegel} = \pi r^2 + \pi r \cdot m$

M 10.13

Kugel

Ist r der Radius einer Kugel, so gilt:



- Volumen: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$
- Oberfläche: $O = 4\pi r^2$

$$r = 6cm$$
$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot (6cm)^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 216cm^3 \approx 905cm^3$$
$$O = 4\pi \cdot (6cm)^2 = 4\pi \cdot 36cm^2 \approx 452cm^2$$